Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza -
Tutore: I. Olivieri

19/04/2005

Esercizio 1. Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una identificazione. Se $(X, \mathcal{T}_X)$ è separabile allora anche $(Y, \mathcal{T}_Y)$ è separabile.

Esercizio 2. La restrizione di una identificazione ad un aperto saturo è una identificazione.

Esercizio 3. Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, siano ρ, σ due relazioni di equivalenza, la prima su X e la seconda su Y. Se f è compatibile rispetto a ρ, σ allora f induce $\tilde{f} : (X/\rho, \mathcal{T}_{X/\rho}) \to (Y/\sigma, \mathcal{T}_{Y/\sigma})$.
Dimostrare che:

1. se f è continua allora $\tilde{f}$ lo è;
2. se f è una identificazione allora $\tilde{f}$ lo è.

Esercizio 4 (Lo spazio proiettivo)**.** Sia $X = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ con $n \geq 0$ e sia $\mathcal{E}_X$ la topologia euclidea indotta su X da $\mathbb{R}^{n+1}$. Definiamo su X la relazione di equivalenza

$$\forall x, y \in X \quad x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ tale che } y = tx \tag{1}$$

Lo spazio topologico quoziente $\left(X/\sim, \mathcal{E}_{X/\sim}\right)$ è detto **spazio proiettivo reale n dimensionale** e lo si denota con $(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}, \mathcal{E}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}})$.
Si verifichi che:

1. la proiezione canonica $p : X \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è aperta ma non chiusa se $n \geq 1$;
2. gli insiemi $U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \mid x_i \neq 0 \}$ sono tali che
   (a) U_i è aperto e $U_0 \cup \ldots \cup U_n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$;
   (b) U_i è denso in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$;
   (c) si può scrivere un omeomorfismo tra gli spazi topologici $(U_i, \mathcal{E}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}}\big|_{U_i})$ e $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$.
3. dati gli insiemi $H_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} - U_i$ con $i = 0, \ldots, n$, vale che $(H_i, \mathcal{E}_{pn}\big|_{H_i})$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$.