Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

05/04/2005

Esercizio 1. Siano $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici e sia $\mathcal{T}_{X\times Y}$ la topologia prodotto su $X \times Y$. Dimostrare che

- $\mathcal{T}_{X\times Y} = \mathcal{P}(X \times Y)$ se e solo se $\mathcal{T}_X = \mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{T}_Y = \mathcal{P}(Y)$
- $\mathcal{T}_{X\times Y} = \mathcal{I}(X \times Y)$ se e solo se $\mathcal{T}_X = \mathcal{I}(X)$ e $\mathcal{T}_Y = \mathcal{I}(Y)$

dove $\mathcal{P}(\cdot), \mathcal{I}(\cdot)$ denotano la topologia discreta e quella banale.

Esercizio 2. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici e sia $\mathcal{T}$ la topologia prodotto su $X \times Y$. Sia $\mathcal{T}'_X$ una topologia su X tale che $\mathcal{T}'_X \prec \mathcal{T}_X$.
Se $\mathcal{T}'$ è la topologia prodotto su $(X, \mathcal{T}'_X) \times (Y, \mathcal{T}_Y)$ dimostrare che

$$\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$$

Esercizio 3. Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ un omeomorfismo. Sia $y_0 \in Y$ un elemento fissato e sia

$$\begin{array}{rccc} F: & (X, \mathcal{T}_X) & \to & (Y, \mathcal{T}_Y) \times (Y, \mathcal{T}_Y) \\ & x & \mapsto & (f(x), y_0) \end{array}$$

Dimostrare che F è un'immersione.

Esercizio 4. Siano:

$$\begin{array}{rccc} f: & (X, \mathcal{T}_X) & \to & (Y, \mathcal{T}_Y) \\ g: & (X', \mathcal{T}_{X'}) & \to & (Y', \mathcal{T}_{Y'}) \end{array}$$

due applicazioni tra spazi topologici. Definiamo:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & (X \times X', \mathcal{T}) & \to & (Y \times Y', \mathcal{T}') \\ & (x, x') & \mapsto & (f(x), g(x')) \end{array}$$

dove $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ denotano le topologie prodotto sugli spazi $X \times X'$ e $Y \times Y'$ rispettivamente.
Dimostrare che

1. Φ è continua $\iff$ f, g sono continue;
2. Φ è aperta $\iff$ f, g sono aperte;
3. Φ è un omeopmorfismo $\iff$ f, g sono degli omeomorfismi.

Esercizio 5. Siano:

$$\begin{array}{rccc} f: & (X, \mathcal{T}_X) & \to & (Y, \mathcal{T}_Y) \\ g: & (X, \mathcal{T}_X) & \to & (Y', \mathcal{T}_{Y'}) \end{array}$$

due applicazioni tra spazi topologici. Definiamo:

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & (X, \mathcal{T}_X) & \to & (Y \times Y', \mathcal{T}_{Y\times Y'}) \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x')) \end{array}$$

Dimostrare che

1. Ψ è continua $\iff$ f, g sono continue;

2. Ψ è aperta $\Longrightarrow$ f, g sono aperte;

3. se f, g sono aperte allora Ψ può non essere aperta.

Esercizio 6. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici e siano A, B due sottoinsiemi di X e Y rispettivamente. Sia $(X \times Y, \mathcal{T}_{\times Y})$. Verificare che:

1. $Int(A \times B) = Int(A) \times Int(B)$

2. $Est(A \times B) = (Est(A) \times Y) \cup (X \times Est(B))$

3. $\overline{(A \times B)} = \overline{A} \times \overline{B}$

4. $Fr(A \times B) = (Fr(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times Fr(B))$

5. $D(A \times B) = (D(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times D(B))$

Esercizio 7. Siano $(X, \mathcal{T}_d)$ e $(X', \mathcal{T}_{d'})$ due spazi metrizzabili allora $(X \times X', \mathcal{T}_{X \times X'})$ è metrizzabile.

Esercizio 8. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici verificanti una delle seguenti proprietà:

1. sono separabili

2. verificano il primo assioma di numerabilità

3. verificano il secondo assioma di numerabilità

Dimostrare che $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ verifica la stessa proprietà.

Esercizio 9. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici tali che $(X \times Y, \mathcal{T}_{X \times Y})$ verifica una delle seguenti proprietà:

1. è metrizzabile

2. verifica il primo o il secondo assioma di numerabilità

3. è separabile

Dimostrare che anche $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ verificano la stessa proprietà.