Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

04/04/2005

Esercizio 1. Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y > 0\ \}$. Determinare interno, esterno, frontiera, chiusura e derivato di S rispetto alla topologia euclidea.

Esercizio 2. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e siano A, B due sottoinsiemi di X. Verificare che:

1. $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$
2. $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$
3. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$
4. $Est(A \cup B) = Est(A) \cap Est(B)$
5. $Est(A) \cup Est(B) \subset Est(A \cap B)$
6. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
7. $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
8. $D(A \cup B) = D(A) \cup D(B)$
9. $D(A \cap B) \subset D(A) \cap D(B)$

Esercizio 3. Sia X l'insieme dei numeri reali non negativi e $\mathcal{T}$ la topologia avente per sottobase la famiglia $S = \{[0, n) \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1\ \}$. Determinare il derivato di $\{\frac{1}{2}\}$.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{T}_X$ una topologia su di un insieme X tale che $\mathcal{I}_X \prec \mathcal{T}_X \prec \mathcal{P}(X)$, dove $\mathcal{I}_X$ denota la topologia banale e $\mathcal{P}(X)$ denota quella discreta su X. Sia poi $\mathcal{T}_Y$ una topologia su un insieme Y tale che $\mathcal{I}_Y \prec \mathcal{T}_Y \prec \mathcal{P}(Y)$ determinare l'insieme $\mathcal{C}$ di tutte le applicazioni continue:

1. da $(X, \mathcal{I}_X)$ a $(Y, \mathcal{I}_Y)$
2. da $(X, \mathcal{I}_X)$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$
3. da $(X, \mathcal{P}(X))$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$
4. da $(X, \mathcal{T}_X)$ a $(Y, \mathcal{P}(Y))$

Esercizio 5. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{E}$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Siano $f, g : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ due applicazioni continue e α un numero reale. Verificare che le seguenti applicazioni sono continue:

1. $f + g : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$, con $(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in X$;
2. $f \cdot g(X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$, con $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \forall x \in X$;
3. $\alpha f(X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$, con $(\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \forall x \in X$.

Esercizio 6. Sia $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita $\mathcal{K}$. Determinare una applicazione $f : (\mathbb{R}, \mathcal{K}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{K})$ tale che:

1. f sia chiusa, non aperta e non continua;
2. f sia aperta, non chiusa e non continua;
3. f sia continua, non aperta, non chiusa.

Esercizio 7. Siano $m, n \in \mathcal{N}$ tali che $1 \leq m < n$. Sia $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione così definita $p(x) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Verificare che p è un'applicazione aperta non chiusa rispetto alle topologia euclidee.

Esercizio 8. Siano $m, n \in \mathcal{N}$ tali che $1 \leq n < m$. Sia $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione così definita $i(x) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Verificare che i è un'applicazione chiusa e non aperta rispetto alle topologia euclidee.

Esercizio 9. Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'applicazione lineare. Supposto che su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbb{R}^m$ sia fissata la topologia euclidea, verificare che:

1. se T è suriettiva allora T è aperta (e continua);
2. se T è iniettiva allora T è chiusa (e continua)

Esercizio 10. Dimostrare che se X_1 e X_2 sono due spazi topologici, l'applicazione $\sigma : X_1 \times X_2 \to X_2 \times X_1$ definita da $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$ è un omeomorfismo.

Esercizio 11. Dimostrare che se $X_1, \dots, X_m$ sono spazi topologici discreti (rispettivamente banali), il prodotto $X_1 \times \ldots \times X_m$ è discreto (rispettivamente banale).