Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

15/03/2005

Esercizio 1. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ due spazi topologici dimostrare che l'insieme
$$\mathcal{U} = \{V \subset X \cup Y \mid V \cap X \in \mathcal{T}_X \text{ e } V \cap Y \in \mathcal{T}_Y \}$$
è una topologia su $X \cup Y$.

Esercizio 2. Dimostrare che in $\mathbb{R}^n$ la topologia cofinita $\mathcal{K}$ è strettamente meno fine della topologia euclidea $\mathcal{E}$.

Esercizio 3. Determinare la topologia $\mathcal{T}(S)$ su $\mathbb{R}$ avente come sottobase l'insieme di $\mathbb{R}$ così definito:
$$S = \{(-\infty, 0), \{0\}, (0, +\infty)\}$$
L'insieme è una base per tale topologia?

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{R}_d, j_d)$ lo spazio reale su cui è definita la topologia determinata dalla base
$$\mathcal{B}_d = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\ a < b \}$$
e sia $(\mathbb{R}_e, \mathcal{E})$ lo spazio reale su cui è definita la topologia determinata dalla base
$$\mathcal{B}_e = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\ a < b \}$$
Dimostrare che l'insieme
$$\{[a, b) \times (c, d) | \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\ a < b\ c < d \}$$
induce una topologia su $\mathbb{R}_d \times \mathbb{R}_e$.

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}$ con la topologia j_s definita dalla base
$$\mathcal{B}_s = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\ a < b \}$$
Verificare che:
- la topologia euclidea $\mathcal{E}$ su $\mathbb{R}$ è strettamente più fine di j_s ovvero che $\mathcal{E} \prec j_s$;
- $\forall (a, b] \in \mathcal{B}_s$ si ha $\mathbb{R} - (a, b] \in j_s$.

Esercizio 6. Definiamo su $\mathbb{R}$ l'insieme
$$\mathcal{B} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q}\ a < b \}$$
Verificare che:
- $\mathcal{B}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{E} \prec \mathcal{T} \prec j_s$.

Esercizio 7. Sia $\mathcal{S} = \{(n, n+1] \mid \forall n \in \mathbb{Z} \}$.
- Determinare la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ avente $\mathcal{S}$ come sottobase.
- Dimostrare che $\mathcal{T}$ è meno fine di j_s, cioé $(\mathcal{T} \prec j_s)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}$ determinare una base locale di a formata da un solo elemento.