Università degli Studi Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 - Corso di Laurea in Matematica - a.a. 2004/2005
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa A. Scaramuzza - Tutore: I. Olivieri

24/05/2005

Esercizio 1. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Dimostrare che $(X, \mathcal{T})$ è connesso se e solo se ogni applicazione continua $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$ è costante.

Esercizio 2. Verificare che ogni spazio topologico discreto $(X, \mathcal{P}(X))$ è totalmente sconnesso dimostrando che ogni insieme con cardinalità ≥ 2 è sconnesso.

Esercizio 3. Sia $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$ lo spazio topologico avente come sottobase per la topologia $\mathcal{T}$ la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{S} = \{V_x = \{x, x+1\} \mid x = 2k+1, k \in \mathbb{Z}\ \}$$

Determinare i sottoinsiemi connessi e le componenti connesse di $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$.

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{Q}, \mathcal{E}\big|_{\mathbb{Q}})$ e sia ρ la relazione di equivalenza su $\mathbb{Q}$ così definita:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x\rho y \iff x, y \geq 0 \text{ oppure } x, y < 0$$

Verificare che $(\mathbb{Q}/\rho, \mathcal{E}\big|_{\mathbb{Q}}/\rho)$ è connesso.

Esercizio 5. Dimostrare che ogni spazio topologico discreto è localmente connesso e totalmente sconnesso.
Se $(X, \mathcal{T})$ è localmente connesso e totalmente sconnesso allora $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Esercizio 6. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia ρ una relazione di equivalenza su $(X, \mathcal{T})$. Dimostrare che se ogni classe di equivalenza è connessa e che se lo spazio topologico quoziente è connesso allora $(X, \mathcal{T})$ è connesso.

Esercizio 7.

1. Dimostrare che ogni spazio topologico banale è connesso per archi.
2. Dimostrare che ogni sottoinsieme convesso di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ è connesso per archi.
3. Dimostrare che se $(X, \mathcal{T})$ è connesso per archi e se $\mathcal{T}'$ è un'altra topologia su X tale che $\mathcal{T}' \prec \mathcal{T}$ allora $(X, \mathcal{T}')$ è connesso per archi.

   In particolare $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è connesso per archi.
4. Dimostrare che se X ha cardinalità ≥ 2 allora $(X, \mathcal{P}(X))$ non è connesso per archi.