Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2004/2005
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa T. Vistarini
Tutori: Andrea Agnesse & Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/*

Soluzioni del tutorato n.5 del 31/3/2005

Esercizio 1
Per prima cosa notiamo che $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n} \rangle = \langle \mathbf{v_1} \rangle + \langle \mathbf{v_2} \rangle + \dots + \langle \mathbf{v_n} \rangle$ è sempre vero, indipendentemente dal fatto che $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ siano tra loro linearmente indipendenti o meno.
A questo punto resta da dimostrare che $\langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v_n} \rangle$ se e solo se $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ sono linearmente indipendenti.

Prop. Dimostriamo che se $\mathcal{U} \oplus \langle \mathbf{w} \rangle$, con $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}$ base di $\mathcal{U} \Rightarrow \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti:
se (per assurdo) fossero linearmente dipendenti $\Rightarrow \exists\ a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ non tutti nulli tali che $a_1\mathbf{u_1} + \dots + a_n\mathbf{u_n} + a_0\mathbf{w} = 0$:
se $a_0 \neq 0 \Rightarrow \mathbf{w} = -\frac{1}{a_0}(a_1\mathbf{u_1} + \dots + a_n\mathbf{u_n}) \Rightarrow \mathbf{w} \in \mathcal{U} \Rightarrow$ CONTRADDIZIONE perché per ipotesi $\mathcal{U} \oplus \langle \mathbf{w} \rangle$;
se $a_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}$ sono linearmente dipendenti: CONTRADDIZIONE perché $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}$ base di $\mathcal{U}$
$\Rightarrow \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \dots, \mathbf{u_n}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti.

$\Rightarrow$ $\langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle \Rightarrow \langle \mathbf{v_1} \rangle \cap \langle \mathbf{v_2} \rangle = \langle \mathbf{0} \rangle \Rightarrow \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ non proporzionali $\Rightarrow \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ linearmente indipendenti;
$(\langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle) \oplus \langle \mathbf{v_3} \rangle \Rightarrow \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ linearmente indipendenti per la proposizione appena dimostrata;
$\vdots$
Continuando così alla fine avrò $(\langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v_{n-1}} \rangle) \oplus \langle \mathbf{v_n} \rangle \Rightarrow \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ linearmente indipendenti per la proposizione appena dimostrata.

$\Leftarrow$ $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ linearmente indipendenti $\Rightarrow \langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle$: ovvio!!
$\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ linearmente indipendenti $\Rightarrow (\langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle) \oplus \langle \mathbf{v_3} \rangle$: infatti se $\exists\ k \in \mathbb{R} \mid k\mathbf{v_3} \in \langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \langle \mathbf{v_2} \rangle \Rightarrow \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ linearmente dipendenti $\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE;
$\vdots$
Continuando così alla fine avrò $(\langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v_{n-1}} \rangle) \oplus \langle \mathbf{v_n} \rangle$: infatti se $\exists\ k \in \mathbb{R} \mid k\mathbf{v_n} \in \langle \mathbf{v_1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v_{n-1}} \rangle \Rightarrow \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ linearmente dipendenti $\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE.

Esercizio 2
$\dim(\mathcal{W}_1) = 3$, mentre $\dim(\mathcal{W}_2) = 4 \Rightarrow$ per la formula di Grassmann $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2)$ è

almeno 1 $\Rightarrow$ la somma non è diretta.

Esercizio 3

Ipotizziamo per assurdo che $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^2) = n$ con n finito $\Rightarrow$ presi comunque $n+1$ vettori di $\mathbb{R}^2$, questi sono linearmente dipendenti.

Prendiamo come vettori $(1,0), (\pi,0), (\pi^2,0), \ldots, (\pi^n,0)$: poiché sono linearmente dipendenti $\exists\ a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{Q}$ tali che $a_1(1,0) + a_2(\pi,0) + \ldots + a_{n+1}(\pi^n,0) = (0,0)$.

Guardando la prime componenti otteniamo $a_1 + a_2\pi + \ldots + a_{n+1}\pi^n = 0$.

Considero ora il polinomio $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_{n+1}x^n \in \mathbb{Q}[x]$: dunque $f(\pi) = 0 \Rightarrow \pi$ è la radice di un polinomio a coefficienti razionali $\Rightarrow \pi$ non è trascendente $\Rightarrow$ CONTRADDIZIONE $\Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}^2) = \infty$.

Esercizio 4

Usiamo la definizione di sottospazio vettoriale:

- $\mathbf{0} \in \mathcal{I}_0$, infatti $\quad tr(\mathbf{0}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} 0 = n \cdot 0 = 0$
- $\mathcal{A} = (a_{ij}), \mathcal{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{I}_0 \Rightarrow \mathcal{A} + \mathcal{B} = (a_{ij} + b_{ij})$
  $tr(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0 + 0 = 0$
- $\mathcal{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{I}_0, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\mathcal{A} = (ca_{ij})$
  $tr(c\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n}(ca_{ii}) = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = c \cdot 0 = 0$