Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2004/2005
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa T. Vistarini
Tutori: Andrea Agnesse & Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/*

Soluzioni del tutorato n.4 del 24/3/2005

Esercizio 1 Il sistema equivale a scrivere $\mathbf{v_1}x_1+\mathbf{v_2}x_2+\ldots+\mathbf{v_n}x_n = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$. Poiché i vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\ldots$, $\mathbf{v_n}$ sono indipendenti, rappresentano una base dello spazio $\mathbb{R}^n$, perciò è possibile scrivere *ogni* vettore (perché sono generatori) come una combinazione lineare *unica* (perché linearmente indipendenti) dei vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\ldots$, $\mathbf{v_n}$, dunque i valori di x_1, x_2, $\ldots$, x_n sono unici.

Esercizio 2

(c) $x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z$, dunque ho due parametri che posso chiamare $\begin{cases} y=s \\ z=t \end{cases}$ a cui posso dare valori arbitrari per trovare due vettori indipendenti (i più comodi sono $s=1$, $t=0$ e $s=0$, $t=1$), da cui ottengo i vettori $(-1,0,1)$ e $(-1,1,0)$;

(d) $x_1-x_3+x_4=0 \Rightarrow x_1=x_3-x_4$, dunque, chiamando $\begin{cases} x_2=r \\ x_3=s \\ x_4=t \end{cases}$ posso trovare i vettori di una base come prima, ottenendo $(0,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$ e $(-1,0,0,1)$.

Esercizio 3 NOTA: in quest'esercizio i generatori di $\mathcal{W}_1$ saranno indicati con u_i, mentre quelli di $\mathcal{W}_2$ con v_j.

(a) $\underline{\mathcal{W}_1}$: $\begin{cases} a-b=0 \\ a+b-c=0 \\ -a+b+c=0 \\ -b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b=0 \\ \\ c=0 \\ b=c=0 \end{cases} \Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti $\Rightarrow \dim(\mathcal{W}_1)=3$

$\underline{\mathcal{W}_2}$: $\begin{cases} a-b=0 \\ -b=0 \\ -a=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \dim(\mathcal{W}_2)=2$

Notare che, per la formula di Grassmann, $\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2$ ha dimenzione almeno 1,

dunque so già che la somma non è diretta!!
$\underline{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2}$: per la definizione di spazio somma cerco i generatori di $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ nelle basi di $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ e una base, per esempio, è $\{u_1, u_2, u_3, v_1\} \Rightarrow \dim(\mathcal{V}) = 4 \Rightarrow \dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) = 1$
$\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: un vettore di $\mathcal{W}_1$ ha componenti $(a - b, a + b - c, -a + b + c, -b + c)$; uno di $\mathcal{W}_2$ ha componenti $(d - e, -e, -d, 0)$ (a, b, c, d ed e sono i coefficienti delle combinazioni lineari). Uguagliando i due vettori trovo i valori dei coefficienti che mi danno i vettori dell'intersezione, da cui posso poi estrarre una base.

(b) $\underline{\mathcal{W}_1}$: sono linearmente dipendenti (anche perché sono 4 e sono vettori di $\mathbb{R}^3$); $\dim = 2$ e una possibile base è $\{u_2, u_3\}$
$\underline{\mathcal{W}_2}$: $\dim = 2$ e una base è $\{v_2, v_3\}$
$\underline{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2}$: la somma non è diretta (per Grassmann), $\dim = 3$ (e la base?!?)
$\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: $\dim = 1$ e una base è il vettore $(1, 0, 0)$

(c) $\underline{\mathcal{W}_1}$: $\dim = 2$
$\underline{\mathcal{W}_2}$: $\dim = 2$
$\underline{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2}$: $\dim = 3$
$\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: $\dim = 1$ e una base è $(1, -1, 0)$ (notare che questo vettore sta sia in $\mathcal{W}_1$ che in $\mathcal{W}_2$)

(d) $\underline{\mathcal{W}_1}$: $\dim = 1$ (i due vettori sono 'a occhio' proporzionali)
$\underline{\mathcal{W}_2}$: $\dim = 3$
$\underline{\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2}$: $\dim = 3$ ($\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_2$)
$\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: $\dim = 1$ ($\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1$)

(e) $\underline{\mathcal{W}_1}$: $\dim = 1$
$\underline{\mathcal{W}_2}$: $\dim = 2$
$\underline{\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2}$: $\dim = 3$
$\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: $\dim = 0$

(f) $\underline{\mathcal{W}_1}$: $\dim = 2$
$\underline{\mathcal{W}_2}$: $\dim = 2$
$\underline{\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_2}$: $\dim = 4$
$\underline{\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2}$: $\dim = 0$