Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2004/2005
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa T. Vistarini
Tutori: Andrea Agnesse & Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/*

Tutorato n.4 del 24/3/2005

Esercizio 1 Dimostrare che se $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_n} \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ sono vettori linearmente indipendenti allora il sistema

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} & \cdots & \mathbf{v_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ammette un'unica soluzione.

Esercizio 2 Determinare una base dei seguenti spazi vettoriali:

(a) $M_n(\mathbb{R})$
(b) $\{M_n(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \ \ \forall\, i \neq j\}$
(c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$

Esercizio 3 Dire per le seguenti coppie di $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ se i vettori che li generano sono linearmente dipendenti o indipendenti, determinare la loro dimensione e trovarne una base. Dire, giustificando la risposta, se $\mathcal{V} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2$ è somma diretta, determinare $\dim_\mathbb{R} \mathcal{V}$ e scrivere una sua base. Se $\dim(\mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2) \geqslant 1$ determinarne una base.

(a) $\mathcal{W}_1 = <(1, 1, -1, 0), (-1, 1, 1, -1), (0, -1, 1, 1)>$
$\mathcal{W}_2 = <(1, 0, -1, 0), (-1, -1, 0, 0)>$
(b) $\mathcal{W}_1 = <(1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (-1, -\frac{1}{2}, 0)>$
$\mathcal{W}_2 = <(1, 0, -1), (-1, 0, 1), (-2, 0, 1)>$
(c) $\mathcal{W}_1 = <(1, -1, 1), (1, -1, 0)>$
$\mathcal{W}_2 = <(1, 0, 0), (1, 1, 0)>$
(d) $\mathcal{W}_1 = <(1, 0, 0), (-1, 0, 0)>$
$\mathcal{W}_2 = <(-1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 1)>$

(e) $\mathcal{W}_1 = <(0,1,1),(0,-1,-1)>$
$\mathcal{W}_2 = <(1,0,1),(1,0,0),(-1,0,1)>$

(f) $\mathcal{W}_1 = <(1,0,-1,0),(-1,0,0,0),(-1,0,1,0)>$
$\mathcal{W}_2 = <(0,-1,0,-1),(0,0,0,-1),(0,-2,0,-1)>$

Esercizio 4 Dire se esiste l'inversa delle seguenti matrici e, se possibile, calcolarne l'inversa:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$