Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2004/2005
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa T. Vistarini
Tutori: Andrea Agnesse & Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/*

Soluzioni del tutorato n.3 del 17/3/2005

Esercizio 1

(a) È uno spazio vettoriale; basta vedere che le 8 proprietà degli spazi vettoriali sono soddisfatte da elementi di $\mathbb{R}$ e che $\mathbb{Q}$ è un sottinsieme di $\mathbb{R}$.

(b) Non è uno spazio vettoriale, infatti se prendiamo come elemento di $\mathbb{R}$ $\sqrt[3]{2}$ e come elemento di $\mathbb{Q}$ $\mathbf{1}$, quello che otteniamo è $\sqrt[3]{2}\cdot\mathbf{1}=\sqrt[3]{2}$, che non è un elemento di $\mathbb{Q}$.

(c) È uno spazio vettoriale:

- $\underline{f,g \in C_{[a,b]} \Rightarrow (f+g) \in C_{[a,b]}}$:
  $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta$ tale che $|x-x_0|<\delta \Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(x_0)|<\varepsilon$
  ora $|(f+g)(x)-(f+g)(x_0)| = |f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)| = |f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)| \leqslant |f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon$
  poiché $f,g\in C_{[a,b]} \Rightarrow \forall\frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists\ \delta_f$ tale che $|x-x_0|<\delta_f \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$
  e $\exists\ \delta_g$ tale che $|x-x_0|<\delta_g \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x_0\in[a,b]$
  prendendo $\delta := min\{\delta_f,\delta_g\}$
  $\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ se $|x-x_0|\leqslant\delta\leqslant\delta_f$
  $|g(x)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$ se $|x-x_0|\leqslant\delta\leqslant\delta_g$
  $\Rightarrow |(f+g)(x)-(f+g)(x_0)|<\varepsilon$ se $|x-x_0|\leqslant\delta$

- $\underline{f\in C_{[a,b]} \text{ e } c\in\mathbb{R} \Rightarrow (c\cdot f)\in C_{[a,b]}}$:
  $|(c\cdot f)(x)-(c\cdot f)(x_0)|\leqslant\varepsilon\ \forall|x-x_0|\leqslant\varepsilon$
  $|(c\cdot f)(x)-(c\cdot f)(x_0)| = |c\cdot f(x)-c\cdot f(x_0)| = |c|\cdot|f(x)-f(x_0)|\leqslant|c|\frac{\varepsilon}{|c|}$
  se x e x_0 sono tali che $|x-x_0|\leqslant\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{|c|}$

SV1 $f,g,h\in C_{[a,b]}$ allora $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+(h)(x) = f(x)+g(x)+h(x) = f(x)+(h+g)(x) = (f+(g+h))(x)$;

SV2 se $0(x)$ è la funzione identicamente nulla su $[a,b]$ (che ovviamente è continua) $(f+0)(x) = f(x)+0(x) = f(x)+0 = f(x)$;

SV3 $\forall f\in C_{[a,b]}$ sia $(-f)(x)=-f(x)$, allora $(f+(-f))(x) = f(x)+(-f(x)) = f(x)-f(x) = 0 = 0(x)$ funzione identicamente nulla;

SV4 $(f+g)(x) = f(x) + g(x) =$ [1] $g(x) + f(x) = (g+f)(x)$;

SV5 $(c\cdot(f+g))(x) = c\cdot(f+g)(x) = c\cdot(f(x)+g(x)) = c\cdot f(x)+c\cdot g(x) = (c\cdot f+c\cdot g)(x)$;

SV6 $((k+h)\cdot f)(x) = (k+h)\cdot f(x) = k\cdot f(x) + h\cdot f(x) = (k\cdot f + h\cdot f)(x)$;

SV7 $((kh)\cdot f)(x) = (kh)\cdot f(x) = khf(x) = k(hf(x)) = (k(h\cdot f))(x)$;

SV8 $(1\cdot f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x)$.

(d) È uno spazio vettoriale.

(e) È uno spazio vettoriale:
$M_n(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale, per cui basta far vedere che $\mathbf{0}$ è una matrice simmetrica e che date $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ matrici simmetriche e $c \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{A}+\mathcal{B}$ e $c\mathcal{A}$ sono simmetriche:

- $\mathbf{0}$ è la matrice nulla, che è simmetrica;
- $\mathcal{A} = (a_{ij})$ e $\mathcal{B} = (b_{ij})$ matrici simmetriche $\Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$ e $b_{ij} = b_{ji} \Rightarrow$
$(\mathcal{A}+\mathcal{B})_{ij} = (a_{ij}+b_{ij}) = (a_{ji}+b_{ji}) = (\mathcal{A}+\mathcal{B})_{ji} \Rightarrow \mathcal{A}+\mathcal{B}$ è simmetrica;
- $\mathcal{A} = (a_{ij})$ è simmetrica e $c \in \mathbb{R}$, $a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow ca_{ij} = ca_{ji}$ dunque $c\mathcal{A}$ è simmetrica.

Esercizio 2

$$\mathcal{A} \text{ è invertibile} \Rightarrow \mathbb{I}_n = \mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^{-1} \Rightarrow \mathbb{I}_n = {}^t(\mathbb{I}_n) = {}^t(\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}^{-1}) = {}^t(\mathcal{A}^{-1})\cdot({}^t\mathcal{A}) \Rightarrow$$

$${}^t(\mathcal{A}^{-1}) = ({}^t\mathcal{A})^{-1}$$

Esercizio 3
Per far vedere che è un sottospazio vettoriale usiamo la caratterizzazione usata nell'esercizio 5(e):

- sappiamo che $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_1$ e $\mathbf{0} \in \mathcal{W}_2$, in quanto $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ sottospazi vettoriali di $\mathcal{V}$, dunque $\mathbf{0}+\mathbf{0} \in \mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2$;
- $a, b \in \mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2 \Rightarrow \exists\ a_1, b_1 \in \mathcal{W}_1$ e $a_2, b_2 \in \mathcal{W}_2 \mid a = a_1+a_2$ e $b = b_1+b_2 \Rightarrow$
$a+b = (a_1+a_1)+(b_1+b_2) =$ [2] $\underbrace{(a_1+b_1)}_{\in\mathcal{W}_1} + \underbrace{(a_2+b_2)}_{\in\mathcal{W}_2} \in \mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2$;
- $a \in \mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2$, $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c(a_1+a_2) = \underbrace{ca_1}_{\in\mathcal{W}_1} + \underbrace{ca_2}_{\in\mathcal{W}_2} \in \mathcal{W}_1+\mathcal{W}_2$

[1] vale l'ugualianza perché ad x fissato $f(x)$ e $g(x)$ sono valori reali

[2] uso la proprietà commutativa di $\mathcal{V}$

Esercizio 4
Basta notare che $\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 = \mathcal{W}_1 \star \mathcal{W}_2$, in quanto $au_1 \in \mathcal{W}_1$ e $au_2 \in \mathcal{W}_2$ perché $\mathcal{W}_1$ e $\mathcal{W}_2$ sono sottospazi vettoriali.

Esercizio 5

(a) si;

(b) non è uno spazio vettoriale, infatti se ad esempio prendiamo i vettori $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$, abbiamo che $v_1 + v_2 = (1, 0, 1) \notin \mathcal{W}_2$;

(c) $\mathcal{W}_3$ è lo spazio vettoriale nullo, infatti l'unico punto di $\mathbb{R}^3$ che appartiene a $\mathcal{W}_3$ è il punto $(0, 0, 0)$;

(d) non è uno spazio vettoriale; per vederlo basta prendere $v_1 = (0, 0, 1)$ e notare che $2 \cdot v_1 \notin \mathcal{W}_4$.

Esercizio 6
$M_2(\mathbb{R})$ è spazio vettoriale, dunque:

- $a = 0 \Rightarrow \mathbf{0} \in \Theta$;
- $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -a-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (a+b) \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix}$;
- $c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ca \\ -ca & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7

(a)
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\frac{1}{2} & -1 & \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{3}{4} \\ x_3 = \frac{33}{8} \\ x_4 = -\frac{5}{4} \\ x_5 = -2 \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

(c) $\exists\ \infty^1$ soluzioni del tipo $(2-6t, 1-t, -4t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$.