Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2004/2005
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa T. Vistarini
Tutori: Andrea Agnesse & Nazareno Maroni
Sito: ***http://andynaz.altervista.org/***

Soluzioni del tutorato n.2 del 10/3/2005

Notazione

In queste soluzioni vengono usate le seguenti notazioni per le operazioni fondamentali sulle matrici e per le rispettive matrici elementari:

$\mathbf{R}_{i,j}$ indica che le righe i-esima e j-esima sono state scambiate;

$\mathbf{R}_i(c)$ indica che la riga i-esima è stata moltiplicata per una costante $c \neq 0$;

$\mathbf{R}_{i,j}(c)$ indica che alla riga i-esima è stata sommata la j-esima moltiplicata per una costante $c \neq 0$.

Esercizio 1 Calcoliamo l'inversa di $\mathcal{A}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{R}_{3,1}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a questo punto imponiamo $a \neq 0$ per poter dividere per a:

$$\xrightarrow{\mathrm{R}_{3,2}(-\frac{3}{a})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2a+3}{a} & 1 & -\frac{3}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

per lo stesso motivo imponiamo $a \neq -\frac{3}{2}$:

$$\xrightarrow{\mathrm{R}_3(\frac{a}{2a+3})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{R}_{2,3}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \frac{a}{2a+3} & \frac{2a}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{R}_2(\frac{1}{a})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a+3} & \frac{2}{2a+3} & \frac{1}{2a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{R}_{1,2}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2a+1}{2a+3} & -\frac{4}{2a+3} & -\frac{2}{2a+3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2a+3} & \frac{2}{2a+3} & \frac{1}{2a+3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{pmatrix}$$

Quindi per $a \neq 0$ e $a \neq -\frac{3}{2}$ la matrice è invertibile e $\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2a+1}{2a+3} & -\frac{4}{2a+3} & -\frac{2}{2a+3} \\ \frac{1}{2a+3} & \frac{2}{2a+3} & \frac{1}{2a+3} \\ \frac{a}{2a+3} & -\frac{3}{2a+3} & \frac{a}{2a+3} \end{pmatrix}$.

Ora studiamo separatamente i casi $a = 0$ e $a = -\frac{3}{2}$.

<u>Caso $a = 0$</u>

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,3}} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2,1}(1)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3(-1)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{2,3}(-2)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2(\frac{1}{3})} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}(-2)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Quindi per $a = 0$ la matrice è invertibile e l'inversa è $\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$.

<u>Caso $a = -\frac{3}{2}$</u>

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{3,1}(1)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_{3,2}(2)} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Quindi per $a = -\frac{3}{2}$ la matrice non è invertibile, perché se lo fosse il sistema $\mathcal{A}x = 0$ con $\mathcal{A} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ dovrebbe avere un unica soluzione, ma quel sistema ne ammette $\infty^1 : x_3 = t \qquad x_2 = -\frac{2}{3}t \qquad x_1 = -\frac{4}{3}t$.

Scriviamo ora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{-1}$ come prodotto di matrici elementari: poiché fare un'operazione sulle righe equivale a moltiplicare a sinistra per la corrispondente matrice elementare avremo

$$\mathcal{A}^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Per ottenere $\mathcal{A}$ come prodotto di matrici elementari scriviamo $\mathcal{A}$ come $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{-1})^{-1}$, dunque, chiamando le matrici elementari di $\mathcal{A}^{-1}$ come $\mathcal{A}_i$ con $i = 1, ..., 6$ avremo $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{-1})^{-1} = (\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3\mathcal{A}_4\mathcal{A}_5\mathcal{A}_6)^{-1} = \mathcal{A}_6^{-1}\mathcal{A}_5^{-1}\mathcal{A}_4^{-1}\mathcal{A}_3^{-1}\mathcal{A}_2^{-1}\mathcal{A}_1^{-1}$, dunque

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

(i) $a = 0$;

(ii) $a \neq 0$ e $a \neq 3$: in questo caso la soluzione è $(1 - \frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{a})$;

(iii) $a = 3$: in questo caso esistono ∞^1 soluzioni del tipo $(-2t, \frac{1+3t}{2}, t)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

(a) $\exists!$ soluzione: $(-\frac{19}{28}, -\frac{19}{14}, \frac{1}{14})$;

(b) $\exists\ \infty^1$ soluzioni del tipo $(\frac{t}{2}, \frac{2+5t}{4}, 0, t)$ con $t \in \mathbb{R}$;

(c) $\exists!$ soluzione: $(-\frac{13}{15}, \frac{23}{30}, -\frac{2}{3}, \frac{43}{30})$;

(d) il sistema è incompatibile.