Università degli studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica
Tutorato di GE1 - A.A. 2004/2005
Docente: Prof. A. F. Lopez - Esercitatrice: Dott.ssa T. Vistarini
Tutori: Andrea Agnesse & Nazareno Maroni
Sito: *http://andynaz.altervista.org/ge1.htm*

Soluzioni del tutorato n.11 del 19/5/2005

Esercizio 1
Tutto quello che dobbiamo trovare è la funzione $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ che soddisfi le due proprietà SA1 e SA2.
Una funzione possibile (*in quanto la scelta non è unica!!*) è

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Big((x, x^2), (y, y^2)\Big) & \mapsto & y - x \end{array}$$

che consiste in pratica nel proiettare la parabola sull'asse x e considerare l'asse come lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^1$.
Dimostriamo ora le proprietà:

SA1. Sia $P = (a, a^2) \in \mathcal{A}$ e $v \in \mathbb{R}$; devo trovare $Q \in \mathcal{A}$: $\overrightarrow{PQ} = v$ e dimostrare che è unico.
Il punto Q è del tipo (b, b^2), con $b \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = b - a = v \Rightarrow b = a + v$, dunque ottengo un unico valore per b, e dunque un unico punto.

SA2. Sia $P = (a, a^2)$, $Q = (b, b^2)$ e $R = (c, c^2)$;
$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = (b - a) + (c - b) = c - a = \overrightarrow{PR}$.

Esercizio 2
Questo esercizio è in realtà una generalizzazione del precedente.
La funzione che si può scegliere è

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} \times \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \Big((x, f(x)), (y, f(y))\Big) & \mapsto & y - x \end{array}$$

e la dimostrazione è analoga a quella dell'esercizio 1.

Esercizio 3

a. Per trovare l'equazione parametrica della retta abbiamo bisogno della giacitura: $\overrightarrow{PQ} = (-1-1, -1-2) = (-2, -3)$, dunque possiamo prendere il vettore $(2,3)$ ottenendo $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \end{cases}$.
Per l'equazione cartesiana: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \iff 3x - 2y + 1 = 0$

b. Notare che $< (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) > = < (2,3) >$, dunque l'equazione parametrica è: $\begin{cases} x = 3+2t \\ y = -2+3t \end{cases}$, mentre la cartesiana è ottenuta esplicitando dalle due equazioni il parametro t: $3x - 2y - 13 = 0$.

c. Poiché $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, le due rette sono parallele (notare che nel piano due rette non possono essere sghembe).

d. $\varnothing$

e. Per scrivere l'equazione del fascio ho bisogno di due rette passanti per S: le più comode sono $x = -\frac{7}{2}$ e $y = \frac{5}{2}$; dunque l'equazione del fascio è: $\lambda(x + \frac{7}{2}) + \mu(y - \frac{5}{2}) = 0$.

f. Imponendo il passaggio per R ottengo la relazione $\lambda = \frac{9}{13}\mu$, per cui con i valori arbitrari $\mu = \frac{13}{9}$ e $\lambda = 1$ ottengo l'equazione $9x + 13y - 1 = 0$.

g. Poiché $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} = 57$, le due rette sono incidenti.

h. $9x + 13y + t = 0$

Esercizio 4

a. L'equazione parametrica della retta r è: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ z = 1 \end{cases}$; esplicitando il parametro t dalla prima e dalla seconda otteniamo l'equazione cartesiana: $\begin{cases} x - y - \frac{3}{2} = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$.
Dunque l'equazione del fascio è: $\lambda(x - y - \frac{3}{2}) + \mu(z - 1 = 0) = 0$.

b. Andando a sostituire le coordinate di R nel fascio ottengo il piano $x - y - \frac{3}{4}z - \frac{3}{4} = 0$; prendendo poi il fascio di piani paralleli a questo, $x - y - \frac{3}{4}z + t = 0$, e imponendo il passaggio per Q ho che l'equazione di π è $x - y - \frac{3}{4}z + \frac{3}{4} = 0$.

c. Andando a sostituire le coordinate del punto O ho α: $x - y - \frac{3}{2}z = 0$.
Poiché $rg\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\right) = 2$ i piani sono incidenti.
Mettendo a sistema le equazioni dei piani otteniamo che l'intersezione è la retta $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$ o $\begin{cases} x - y - \frac{3}{2}z = 0 \\ x - y - \frac{3}{4}z + \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$

d. Poiché $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ le due rette sono parallele.

e. Giacitura: $(4, 0, -\frac{1}{2})$; equazioni: $\begin{cases} y = 0 \\ x + 8z - 7 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 0 \\ z = 1 - \frac{1}{2}t \end{cases}$

f. sghembe

g. $x - y + 8z - 7 = 0$

Esercizio 5

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{13}{32} & \frac{3}{16} \\ \frac{15}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{16} & \frac{3}{8} \\ \frac{15}{16} & \frac{17}{16} & \frac{3}{32} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$