UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2004-2005

1. (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;

(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;

(c) si dimostri tale risultato.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia Π il piano di equazione $X + Y - 3Z = 0$ e siano R ed R_1 le rette di equazioni parametriche

$$R : \begin{cases} X = 3t - 1 \\ Y = 2t \\ Z = t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}\ ; \quad R_1 : \begin{cases} X = 0 \\ Y = 3u \\ Z = u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

(a) Si determinino (se esistono) le equazioni di tutti i piani affini P tali che $R \subset P$ e $P \cap R_1 = \emptyset$;

(b) Si determinino (se esistono) le equazioni di tutte le rette affini S tali che $S \subset \Pi$ e $S \cap R \neq \emptyset$;

(c) Si determinino (se esistono) le equazioni di tutte le rette affini T tali che $T \subset \Pi$ e T è complanare ad R.

3. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali reali e sia $\dim V = n, \dim W = m$.

(a) Si dimostri che se esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $N(G) = \mathrm{Im}(F)$ e $N(F) = \mathrm{Im}(G)$, allora $n = m$;

(b) si supponga qui che $n = m$. Si dimostri che per ogni applicazione lineare $F : V \to W$ esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $N(G) = \mathrm{Im}(F)$ e $N(F) = \mathrm{Im}(G)$;

(c) Esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $N(G) \subseteq \mathrm{Im}(F)$ e $N(F) \subseteq \mathrm{Im}(G)$?

4. Sia a un numero reale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e siano $v = e_2 - e_3, w = (a-5)e_1 + \frac{7}{4}e_2 + 4e_3$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$F(e_1 + v) = w,\ F(e_1) = ae_1 + 2e_3, F(e_2 + e_3) = e_1 + \frac{1}{4}e_2.$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.

5. Siano $n \geq 2$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, a_1, \ldots, a_{n-1}$ dei numeri reali. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & a_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$. Si calcoli la dimensione dell'autospazio relativo a λ_1;

(b) Sia $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$;

(c) Per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ fissati, per quali $a_1, \ldots, a_{n-1}$ si ha che A è diagonalizzabile?