UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Seconda prova di esonero - a.a. 2004-2005

1. (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;

(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;

(c) si dimostri tale risultato.

2. In uno spazio affine di dimensione 3 sia O, e_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia Π il piano di equazione $X + Y - 3Z = 0$ e siano R ed R_1 le rette di equazioni parametriche

$$R : \begin{cases} X = 3t - 1 \\ Y = 2t \\ Z = t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \ ; \quad R_1 : \begin{cases} X = 0 \\ Y = 3u \\ Z = u \end{cases}, u \in \mathbb{R}.$$

(a) Si determinino (se esistono) le equazioni di tutti i piani affini P tali che $R \subset P$ e $P \cap R_1 = \emptyset$;

(b) Si determinino (se esistono) le equazioni di tutte le rette affini S tali che $S \subset \Pi$ e $S \cap R \neq \emptyset$;

(c) Si determinino (se esistono) le equazioni di tutte le rette affini T tali che $T \subset \Pi$ e T è complanare ad R.

3. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali reali e sia $\dim V = n, \dim W = m$.

(a) Si dimostri che se esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $N(G) = \mathrm{Im}(F)$ e $N(F) = \mathrm{Im}(G)$, allora $n = m$;

(b) si supponga qui che $n = m$. Si dimostri che per ogni applicazione lineare $F : V \to W$ esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $N(G) = \mathrm{Im}(F)$ e $N(F) = \mathrm{Im}(G)$;

(c) Esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $N(G) \subseteq \mathrm{Im}(F)$ e $N(F) \subseteq \mathrm{Im}(G)$?

4. Sia a un numero reale, sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 con base $\{e_1, e_2, e_3\}$ e siano $v = e_2 - e_3, w = (a-5)e_1 + \frac{7}{4}e_2 + 4e_3$. Sia $F : V \to V$ un'applicazione lineare tale che

$$F(e_1 + v) = w, \ F(e_1) = ae_1 + 2e_3, F(e_2 + e_3) = e_1 + \frac{1}{4}e_2.$$

(a) Determinare una matrice di F;

(b) trovare, per ogni $a \in \mathbb{R}$, basi per gli autospazi di F;

(c) determinare i valori di a per i quali F è diagonalizzabile.

5. Siano $n \geq 2$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, a_1, \ldots, a_{n-1}$ dei numeri reali. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & a_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

(a) Sia $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$. Si calcoli la dimensione dell'autospazio relativo a λ_1;

(b) Sia $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$. Si dimostri che A è diagonalizzabile se e solo se $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$;

(c) Per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ fissati, per quali $a_1, \ldots, a_{n-1}$ si ha che A è diagonalizzabile?

SOLUZIONI

1. (a) [Sernesi, Def. 7.1 e 7.4]. (b) e (c) [Sernesi, Teor. 8.1]. ∎

2. (a) Sia $aX + bY + cZ + d = 0$ l'equazione di P. Sostituendo le equazioni di R si trova che $R \subset P$ se e solo se $a(3t-1) + b(2t) + c(t-2) + d = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, cioè se e solo se

$$(3a + 2b + c)t + d - a - 2c = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

quindi se e solo se $3a + 2b + c = 0, d - a - 2c = 0$, da cui $d = a + 2c, b = -\frac{3}{2}a - \frac{c}{2}$.
Ora consideriamo $P \cap R_1$: sostituendo le equazioni di R_1 si trova che

$$(-\frac{3}{2}a - \frac{c}{2})3u + cu + a + 2c = 0$$

cioè

$$(-\frac{9}{2}a - \frac{c}{2})u + a + 2c = 0$$

che non ha soluzioni se e solo se

$$-\frac{9}{2}a - \frac{c}{2} = 0,\ a + 2c \neq 0$$

quindi

$$c = -9a,\ a \neq 0.$$

Allora l'equazione di P diventa

$$aX - \frac{1}{2}(3a - 9a)Y - 9aZ + a - 18a = 0$$

cioè

$$aX + 3aY - 9aZ - 17a = 0$$

e quindi, tenendo conto che $a \neq 0$,

$$X + 3Y - 9Z - 17 = 0.$$

(b) Vediamo prima $R \cap \Pi$: sostituendo le equazioni di R nelle equazioni di Π si trova $3t - 1 + 2t - 3(t - 2) = 0$, quindi $t = -\frac{5}{2}$. Allora

$$R \cap \Pi = Q(-\frac{17}{2}, -5, -\frac{9}{2}).$$

Una retta $S \subset \Pi$ interseca R se e solo se passa per Q. Quindi basta trovare un vettore parallelo ad S, cioè un qualsiasi vettore della giacitura di Π. Dato che le equazioni parametriche di Π sono $\begin{cases} X = u \\ Y = -u + 3v \\ Z = v \end{cases}$ si trova che un vettore parallelo ad S è

$$v_S = -ue_1 + (-u + 3v)e_2 + ve_3$$

e quindi le equazioni parametriche di S sono

$$\begin{cases} X = ut - \frac{17}{2} \\ Y = (-u + 3v)t - 5 \ , \quad t \in \mathbb{R}. \\ Z = vt - \frac{9}{2} \end{cases}$$

(c) Se T è complanare ad R si ha [Sernesi, Prop. 10.3] che o T è parallela ad R oppure T è incidente R. Ma se T è parallela ad R, dato che $T \subset \Pi$ ne segue che R è parallela a Π, contraddizione (come visto sopra R e Π si intersecano in un punto). Allora T è incidente R quindi $T = S$ come in (b). ■

3. (a) Per il teorema 11.6 del [Sernesi] si ha

$$n = \dim N(F) + \dim \operatorname{Im}(F) = \dim \operatorname{Im}(G) + \dim N(G) = m.$$

Sia $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base di $N(F)$ e sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un completamento ad una base di V. Come è noto una base di $\operatorname{Im}(F)$ è data da $\{F(v_{k+1}), \ldots, F(v_n)\}$.

Sia ora $\{F(v_{k+1}), \ldots, F(v_n), w_1, \ldots, w_s\}$ un completamento ad una base di W. Allora $n-k+s=m$, quindi $s=m-n+k$.

(b) Si ha $s=k$. Usando il teorema 11.3 del [Sernesi] possiamo definire

$$G(w_i)=v_i, 1 \leq i \leq k, \quad G(F(v_j))=0, k+1 \leq j \leq n.$$

Allora $N(G) = < F(v_{k+1}), \ldots, F(v_n) > = \mathrm{Im}(F)$, $\mathrm{Im}(G) = < v_1, \ldots, v_k > = N(F)$.

(c) Abbiamo $k = \dim N(F)$, $n-k = \dim \mathrm{Im}(F)$. Se G esiste allora $k = \dim N(F) \leq \dim \mathrm{Im}(G) \leq m$ ed inoltre $n-k = \dim \mathrm{Im}(F) \geq \dim N(G) = m - \dim \mathrm{Im}(G) \geq m-n$ dato che $\dim \mathrm{Im}(G) \leq \dim V = n$. Quindi se G esiste allora $k \leq m$ e $k \leq 2n-m$.

Viceversa supponiamo che $k \leq m$ e $k \leq 2n-m$ e mostriamo che G esiste.

Se $m \geq n$ allora $s = k+m-n \geq k$ e basta definire

$G(w_i)=v_i, 1 \leq i \leq k+m-n, \quad G(F(v_j))=0, k+1 \leq j \leq k+m-n,$

$G(F(v_j))=v_j, k+m-n+1 \leq j \leq n.$

Allora $N(G) = < F(v_{k+1}), \ldots, F(v_{k+m-n}) > \subset \mathrm{Im}(F)$, $\mathrm{Im}(G) = < v_1, \ldots, v_n > = V \supset N(F)$.

Se $m \leq n$ allora $s = k+m-n \leq k$ e basta definire

$$G(w_i)=v_i, 1 \leq i \leq s, \quad G(F(v_{k+i}))=v_{s+i}, 1 \leq i \leq n-k.$$

Allora $N(G) = \{0\} \subset \mathrm{Im}(F)$, $\mathrm{Im}(G) = < v_1, \ldots, v_m > \supset N(F)$. ■

4. (a) $F(e_3) = e_1 + \frac{1}{4}e_2 - F(e_2)$ quindi

$$(a-5)e_1 + \frac{7}{4}e_2 + 4e_3 = w = F(e_1+v) = F(e_1+e_2-e_3) = ae_1 + 2e_3 + F(e_2) - e_1 - \frac{1}{4}e_2 + F(e_2)$$

da cui

$$F(e_2) = -2e_1 + e_2 + e_3, \quad F(e_3) = 3e_1 - \frac{3}{4}e_2 - e_3.$$

Allora la matrice di F nella base $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ è

$$M_e(F) = \begin{pmatrix} a & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) e (c) Il polinomio caratteristico di F è

$$p_F(T) = \begin{vmatrix} a-T & -2 & 3 \\ 0 & 1-T & -\frac{3}{4} \\ 2 & 1 & -1-T \end{vmatrix} = (a-T)(T^2 - \frac{1}{4}) + 6(T - \frac{1}{2}) =$$

$$= -\frac{1}{2}(T - \frac{1}{2})[2T^2 - (2a-1)T - a - 12].$$

Ne segue che gli autovalori di F sono

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{2a - 1 - \sqrt{4a^2+4a+97}}{4},\ \lambda_3 = \frac{2a - 1 + \sqrt{4a^2+4a+97}}{4}.$$

Dato che $4a^2+4a+97 > 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Per vedere se è possibile che $\lambda_2 = \lambda_1$ oppure $\lambda_3 = \lambda_1$ sostituiamo $T = \frac{1}{2}$ nell'equazione $2T^2 - (2a-1)T - a - 12 = 0$. Otteniamo $2\frac{1}{4} - (2a-1)\frac{1}{2} - a - 12 = 0$ cioè $-2a - 11 = 0$, quindi $a = -\frac{11}{2}$.
Allora se $a \neq -\frac{11}{2}$ ne segue che F ha tre autovalori distinti, quindi, per il corollario 13.14 del [Sernesi], si ha che F è diagonalizzabile.
Ora calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente a $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.
Consideriamo il sistema

$$(*)\quad \begin{pmatrix} a-\frac{1}{2} & -2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per risolvere questo sistema osserviamo che, per definizione di autovalore, si ha che la matrice

$$\begin{pmatrix} a-\frac{1}{2} & -2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

ha determinante zero, quindi ha rango minore di 3. Allora una riga del sistema sarà ridondante. Dato che la seconda e terza riga sono palesemente linearmente indipendenti ne segue che il sistema $(*)$ è equivalente a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y - \frac{3}{4}z = 0 \\ 2x + y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}$$

da cui si deducono le soluzioni $x = 0, y = \frac{3}{2}z$. Allora gli autovettori relativi a λ_1 sono tutti del tipo $\frac{3}{2}ze_2 + ze_3 = z(\frac{3}{2}e_2 + e_3)$. Ne segue che una base di V_{λ_1} è $\{\frac{3}{2}e_2 + e_3\}$. Allora $\dim V_{\lambda_1} = 1$. Se $a = -\frac{11}{2}$ si ha che la molteplicità geometrica di λ_1 è 1 mentre quella algebrica è 2 (dato che λ_1 coincide con λ_2 o con λ_3) e pertanto, per il teorema 13.13 del [Sernesi], si deduce che F non è diagonalizzabile.
Infine sia ora $\lambda = \lambda_2$ o $\lambda = \lambda_3$ e calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente a λ. Consideriamo il sistema

$$(**)\quad \begin{pmatrix} a-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -\frac{3}{4} \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Come nel caso precedente osserviamo che, per definizione di autovalore, si ha che la matrice

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -\frac{3}{4} \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

ha determinante zero, quindi ha rango minore di 3. Allora una riga del sistema sarà ridondante. Dato che la seconda e terza riga sono palesemente linearmente indipendenti ne segue che il sistema $(**)$ è equivalente a

$$\begin{cases} (1-\lambda)y - \frac{3}{4}z = 0 \\ 2x + y - (1+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

da cui, risolvendo, si deducono le soluzioni $y = -\frac{2+4\lambda^2}{3}x$, $z = \frac{4-4\lambda}{3}x$. Allora gli autovettori relativi a λ sono tutti del tipo $xe_1 - \frac{2+4\lambda^2}{3}xe_2 + \frac{4-4\lambda}{3}xe_3 = x(e_1 - \frac{2+4\lambda^2}{3}e_2 + \frac{4-4\lambda}{3}e_3)$. Ne segue che una base di V_λ è $\{e_1 - \frac{2+4\lambda^2}{3}e_2 + \frac{4-4\lambda}{3}e_3\}$. ■

5. (a) e (b) Sia $\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(T) = \begin{vmatrix} \lambda-T & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda-T & a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-T & a_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda-T & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda-T \end{vmatrix} = (\lambda-T)^n.$$

Ora calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente a λ. Consideriamo il sistema

$$(*) \quad \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{cases} a_1x_2 = 0 \\ a_2x_3 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-1}x_n = 0 \end{cases}.$$

Se j è il numero degli a_i uguali a zero ne segue che ci sono esattamente $n-j-1$ coordinate x_k che sono nulle, mentre le altre x_k possono assumere tutti i valiri reali possibili. Per esempio, se $a_1 = a_2 = \ldots = a_j = 0$, mentre $a_{j+1} \neq 0, \ldots, a_{n-1} \neq 0$, il sistema ha come soluzione

$x_{j+2} = \ldots = x_n = 0$ ed un autovettore relativo a λ sarà del tipo $(x_1, x_2, \ldots, x_{j+1}, 0, \ldots, 0)$ con $x_1, x_2, \ldots, x_{j+1}$ numeri reali qualsiasi. Allora $\dim V_\lambda = j + 1$. Quindi, per il teorema 13.13 del [Sernesi], si deduce che A è diagonalizzabile se e solo se $j + 1 = n$, cioè se e solo se $j = n - 1$ e quindi se e solo se gli a_i sono tutti nulli.

(c) Nel caso generale il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(T) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - T & a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - T & a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - T & a_3 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} - T & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n - T \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - T).$$

Ora calcoliamo la dimensione dell'autospazio corrispondente a λ_i. L'autospazio relativo a λ_i è dato dalle soluzioni del sistema

$$(A - \lambda_i Id)X = 0.$$

Quindi

$$\dim V_{\lambda_i} = n - r(A - \lambda_i Id).$$

Osserviamo che $A - \lambda_i Id$ è una matrice triangolare superiore ed ha sulla diagonale uno zero al posto (i, i) e $\lambda_j - \lambda_i$ al posto (j, j). Sia ora, per ogni i, $b_i = r(A - \lambda_i Id)$. Quindi, per il teorema 13.13 del [Sernesi], si deduce che

$$A \text{ è diagonalizzabile se e solo se } \sum_{i=1}^{n} (n - b_i) = n. \blacksquare$$