UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2004-2005

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definiscano le nozioni di indipendenza lineare tra vettori di V e di dimensione di V;

(b) Si enunci il teorema principale che relaziona la dipendenza o indipendenza lineare tra due insiemi di vettori di V ed il loro numero;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Sia k un numero reale. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + kx_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{array}{c} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}$$

e

$$W_h =< (1,1,1,1), (0,1,0,-1), (2,3,2,h) > .$$

(a) Si determinino le dimensioni di U, W_h e si scrivano esplicitamente due basi di tali sottospazi;

(b) si determinino le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;

(c) si determinino (se esistono) i valori di h per i quali

$$W_h \oplus U = \mathbb{R}^4.$$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano W_1, W_2 due sottospazi di V di dimensioni n_1, n_2 rispettivamente e tali che $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

(a) Si dimostri che se U è un sottospazio U di V allora

$$U \cap W_1 + U \cap W_2 \subseteq U \cap (W_1 + W_2);$$

(b) si determini per quali interi s_1, s_2 esiste un sottospazio U di V tale che

$$U + W_1 + W_2 = V, \dim U \cap W_1 = s_1, \dim U \cap W_2 = s_2, \dim U \cap (W_1 + W_2) = s_1 + s_2.$$