UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prima prova di esonero - a.a. 2004-2005

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definiscano le nozioni di indipendenza lineare tra vettori di V e di dimensione di V;

(b) Si enunci il teorema principale che relaziona la dipendenza o indipendenza lineare tra due insiemi di vettori di V ed il loro numero;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Sia k un numero reale. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - kx_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + kx_3 = 0 \\ 2x_1 - kx_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari, si determinino i valori di k per i quali il sistema è (o no) compatibile e, in tal caso, si calcolino esplicitamente le soluzioni.

3. Sia k un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i valori di k per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari;

(b) per i valori di k individuati sopra, si determini una sequenza di operazioni elementari che trasforma A in B.

4. Sia h un numero reale. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ siano

U il sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e

$$W_h = < (1,1,1,1), (0,1,0,-1), (2,3,2,h) > .$$

(a) Si determinino le dimensioni di U, W_h e si scrivano esplicitamente due basi di tali sottospazi;

(b) si determinino le dimensioni di $W_h + U$ e di $W_h \cap U$;
(c) si determinino (se esistono) i valori di h per i quali

$$W_h \oplus U = \mathbb{R}^4.$$

5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano W_1, W_2 due sottospazi di V di dimensioni n_1, n_2 rispettivamente e tali che $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
(a) Si dimostri che se U è un sottospazio U di V allora

$$U \cap W_1 + U \cap W_2 \subseteq U \cap (W_1 + W_2);$$

(b) si determini per quali interi s_1, s_2 esiste un sottospazio U di V tale che

$$U + W_1 + W_2 = V, \dim U \cap W_1 = s_1, \dim U \cap W_2 = s_2, \dim U \cap (W_1 + W_2) = s_1 + s_2.$$

SOLUZIONI

1. (a) [Sernesi, Def. 4.4 e 4.14]. (b) e (c) [Sernesi, Teor. 4.12]. ■

2. Applichiamo il metodo di Gauss-Jordan alla matrice orlata

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 2 & -k & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Scambiando R_1 ed R_4 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 2 & -k & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 - 2R_1, R_4 \to R_4 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k-2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -k-1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con l' operazione $R_4 \to R_4 - R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -k-2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

e scambiando R_2 con R_4 otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -k-2 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_3 \to R_3 + (k+2)R_2, R_4 \to R_4 - R_2$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2k+2 & -2k-1 & 3k+3 \\ 0 & 0 & k-2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_4$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2k-5 & 3k+9 \\ 0 & 0 & k-2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 - \frac{k-2}{6}R_3$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2k-5 & 3k+9 \\ 0 & 0 & 0 & (2k^2+k+2)/6 & (-3k^2-3k)/6 \end{pmatrix}.$$

Dato che $2k^2 + k + 2 \neq 0$ per ogni k, si è ottenuto un sistema a gradini che è dunque compatibile per ogni k ed ha, calcolando, l'unica soluzione

$$X_1 = \frac{3k+9}{2} - \frac{(2k+5)(3k^2+3k)}{2(2k^2+k+2)} - \frac{9k^2+9k}{2k^2+k+2}, X_2 = -k-3-\frac{(2k+5)(k^2+k)}{2k^2+k+2} - \frac{6k^2+6k}{2k^2+k+2},$$

$$X_3 = \frac{k+3}{2} - \frac{(2k+5)(k^2+k)}{2(2k^2+k+2)}, X_4 = -\frac{3k^2+3k}{2k^2+k+2}. \blacksquare$$

3. Effettuiamo operazioni elementari su A.

Con l' operazione $R_3 \to R_3 - R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-k & k+1 \end{pmatrix}$$

da cui con l'operazione $R_3 \to R_3 + (k-1)R_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Ora se $k \neq -1$ il rango di A è 3, mentre il rango di B è 2. Ne segue che non è possibile trasformare A in B con sole operazioni elementari. Se invece $k = -1$, con l' operazione $R_1 \to R_1 + R_2$ si ottiene B. ■

4. (a) Un vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ appartiene ad U se e solo se ne soddisfa le equazioni, quindi se e solo se $x_4 = -x_1, x_3 = -x_2$. Pertanto i vettori di U sono tutti del tipo $(x_1, x_2, -x_2, -x_1) = x_1(1,0,0,-1) + x_2(0,1,-1,0)$, quindi una base di U è $\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}$ ed U ha dimensione 2.

Ora vediamo una base di W_h. Eseguiamo operazioni elementari sulla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & h \end{pmatrix}.$$

Con l'operazione $R_3 \to R_3 - 2R_1$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & h-2 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_3 \to R_3 - R_2$ si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}.$$

Ora, se $h = 1$, una base di W_1 è $\{(1,1,1,1),(0,1,0,-1)\}$.

Invece, se $h \neq 1$, una base di W_1 è $\{(1,1,1,1),(0,1,0,-1),(2,3,2,h)\}$. Quindi $\dim W_1 = 2$, $\dim W_h = 3$ se $h \neq 1$.

(b) Calcoliamo $\dim(W_h + U)$ eseguendo operazioni elementari sulla matrice che ha per righe i vettori delle basi di W_h ed U. Da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & h \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con le stesse operazioni sopra si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 - R_1$ si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_4 \to R_4 + R_2, R_5 \to R_5 - R_2$ si ha la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_5 \to R_5 - R_4$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice ha 4 righe linearmente indipendenti (le righe 1, 2, 4 e 5), quindi $\dim(W_h + U) = 4$ per ogni h reale. Dalla formula di Grassmann si deduce

$$\dim(W_h \cap U) = \dim W_h + \dim U - \dim(W_h + U)$$

da cui

$$\dim(W_h \cap U) = \begin{cases} 0 & \text{if } h = 1 \\ 1 & \text{if h} \neq 1 \end{cases}.$$

(c) Allora $W_h \oplus U = \mathbb{R}^4$ se e solo se $h = 1$. ■

5. (a) Se $v \in U \cap W_1 + U \cap W_2$ allora esistono $w_1 \in U \cap W_1, w_2 \in U \cap W_2$ tali che $v = w_1 + w_2$. Quindi $v \in U$ e $v \in W_1 + W_2$, cioè $v \in U \cap (W_1 + W_2)$.

(b) Dimostreremo che U esiste sempre.

Dato che $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ si ha $\dim(W_1 + W_2) = n_1 + n_2$. Ora se U esiste, per la formula di Grassmann si ha

$$s_1+s_2 = \dim U\cap(W_1+W_2) = \dim U+\dim(W_1+W_2)-\dim(U+W_1+W_2) = \dim U+n_1+n_2-n$$

quindi $\dim U = n - n_1 - n_2 + s_1 + s_2$.

Per mostrare che un tale U esiste, siano $\{w_1, \ldots, w_{n_1}\}$ una base di W_1 e $\{v_1, \ldots, v_{n_2}\}$ una base di W_2 da cui, per quanto detto sopra, $\{w_1, \ldots, w_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}\}$ è una base di $W_1 + W_2$. Per la Proposizione 4.16, 2) del [Sernesi] esiste un completamento $\{w_1, \ldots, w_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}, u_1, \ldots, u_{n-n_1-n_2}\}$ ad una base di V. Si definisca

$$U =< w_1, \ldots, w_{s_1}, v_1, \ldots, v_{s_2}, u_1, \ldots, u_{n-n_1-n_2} > .$$

Allora $\dim U = n - n_1 - n_2 + s_1 + s_2$. Inoltre $U + W_1 + W_2$ è generato da tutti i vettori di una base di V, quindi $U + W_1 + W_2 = V$. Per la formula di Grassmann,
$\dim U \cap (W_1 + W_2) = s_1 + s_2 + n - n_1 - n_2 + n_1 + n_2 - n = s_1 + s_2$.
Infine $U + W_1$ è generato da $\{w_1, \ldots, w_{n_1}, v_1, \ldots, v_{s_2}, u_1, \ldots, u_{n-n_1-n_2}\}$ da cui
$\dim(U + W_1) = n_1 + s_2 + n - n_1 - n_2 = n + s_2 - n_2$ e
$\dim U \cap W_1 = n - n_1 - n_2 + s_1 + s_2 + n_1 - n - s_2 + n_2 = s_1$. Analogamente $\dim U \cap W_2 = s_2$.

■