Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE1 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2004/2005

Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutori:A.Agnesse, N. Maroni

Esercitazione del 16/3/2005

Esempi di spazi vettoriali e verifica delle proprieta'.
Definizione di sottospazio vettoriale.

1 (1.1) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e un suo sottinsieme $W = \{(a, b, 0); a, b \in \mathbb{R}\}$. Verificare che W e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

(1.2) Sia $V = M_n(k)$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo k di caratteristica 0.
Verificare che il sottinsieme delle matrici triangolari alte e il sottinsieme delle matrici simmetriche sono sottospazi vettoriali di V.

(1.3) Sia $k[t]$ il k-spazio vettoriale dei polinomi in una variabile a coefficienti in k, $ch(k) = 0$. Si consideri il sottinsieme $k[t]_{deg \leq d}$ costituito dai polinomi di grado $\leq d$. Verificare che $k[t]_{deg \leq d}$ e' un sottospazio vettoriale di $k[t]$.

(1.4) Dimostrare che l'intersezione di due sottospazi vettoriali e' un sottospazio vettoriale.

(1.5) Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo e' un sottospazio vettoriale.

2 Dato il sottinsieme di $\mathbb{R}^3$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$, dimostrare che W e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

3 Sia S il seguente sottinsieme dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$:

$$S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a + b + c + d = 0\}$$

Dimostrare che S e' un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$

4 Si consideri il seguente sottinsieme dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$:

$$S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a = d\}$$

Dimostrare che e' un sottospazio

5 Siano E_1 e E_2 due spazi vettoriali sullo stesso campo k.
Mostrare che e' possibile definire su $E_1 \times E_2$ una struttura di spazio vettoriale.

6 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.
(1) Mostrare che l'insieme :

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax + by = 0, a, b \in \mathbb{R}\}$$

e' un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.
(2) Dati due sottospazi di $\mathbb{R}^2$:

$$E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3x - 2y = 0\}$$

e

$$E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + y = 0\}$$

mostrare che ogni vettore $v \in \mathbb{R}^2$ si scrive in modo unico come somma di un vettore di E_1 e di un vettore di E_2.