UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 12-7-2005 - a.a. 2004-2005

1. Sia V uno spazio vettoriale, U, W due suoi sottospazi.

(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di $U \cap W$ e di $U + W$;

(b) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + hX_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_3 - hX_4 = 0 \\ hX_1 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni, utilizzando esclusivamente operazioni elementari.

3. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando esclusivamente operazioni elementari si determinino i valori di a per i quali A è invertibile, si calcoli A^{-1} e si esprimano A e A^{-1} come prodotto di matrici elementari.

4. Sia k un numero reale e sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 4 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Siano

$$v_1 = e_1 + ke_2 - e_3, v_2 = ke_1 + e_2 + e_4, v_3 = 2e_1 - e_2 - 2e_3 - e_4.$$

(a) Siano $U =< v_1, v_2, v_3 >, W =< e_1, e_2, v_1 - v_3 >$ i sottospazi generati. Si calcoli la dimensione di U e di W;

(b) si determini se esistono valori di k tali che $U + W = W$;

(c) si determini se esistono valori di k tali che esiste un sottospazio U_1 di dimensione 1 tale che $U \oplus W \oplus U_1 = V$.

5. Siano V, W due spazi vettoriali reali e $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano il nucleo e l'immagine di F e se ne indichino le proprietà;

(b) si enunci il teorema di omomorfismo tra spazi vettoriali;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia Oe_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Sia $A(0,1,0)$ un punto di $\mathbf{A}$ e siano p_1 il piano in $\mathbf{A}$ di equazione cartesiana $X - Y + Z = 0$ e p_2 il piano in $\mathbf{A}$ passante per A e di giacitura $< e_1, e_1 - e_3 >$.
(a) Determinare se esistono rette R tali che R è parallela a p_2 ed interseca p_1 in un punto.
(b) Determinare se esistono rette R tali che $R \subset p_2$ ed interseca p_1 in un punto.
(c) Determinare se esistono rette R tali che R è parallela a p_1 e p_2.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali di dimensione finita, $F : V \to W$ un'applicazione lineare e sia U un sottospazio di W.
(a) Si determinino le condizioni necessarie e sufficenti su F ed U sotto le quali $V/U \cong N(F)$;
(b) si determinino le condizioni necessarie e sufficenti su F sotto le quali $V/U \cong \mathrm{Im}(F) + F(U)$;
(c) si determini se esiste un'applicazione lineare $G : W \to V$ tale che $U \oplus N(F) = \mathrm{Im}(G)$.

8. Sia a un numero reale e sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;
(b) trovare basi per gli autospazi di A;
(c) determinare i valori di a per i quali A è diagonalizzabile.