AM5 - I ESONERO
16.04.05

Tema 1 Sia μ misura su X, Σ la classe degli insiemi μ- misurabili. Sia anche $\mu(X) < +\infty$. É vero che

$$E_j \in \Sigma, \quad j \in \mathbf{N}, \quad E_{j+1} \subset E_j \ \forall j \quad \Rightarrow \quad \mu(E_j) \to_{j\to+\infty} \mu(\cap_{j=1}^{\infty} E_j)$$

In caso affermativo, l'affermazione continua ad essere vera anche senza l'ipotesi $E_j \in \Sigma$?

Tema 2

(i) Provare che i chiusi di $\mathbf{R}^N$ sono Lebesgue misurabili.

ii) Provare che la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$ è Borel regolare.

Tema 3 (Teorema di Beppo Levi)

Sia μ misura su X, e siano $0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \ \forall n \in \mathbf{N}$ funzioni misurabili in X. Provare che

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to+\infty} f_n$$

É possibile sostituire l'ipotesi $0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \ \forall n$ con $f_{n+1} \leq f_n \leq 1 \ \forall n$?

Tema 3. Siano $f_n \in L^1(X, \mu)$. Provare che

$$\int_X |f_n - f_m| d\mu \to_{n,m\to+\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \exists f \in L^1 : \quad \int |f_n - f| \to_n 0$$

e che esiste una sottosuccessione f_{n_k} che converge quasi ovunque a f.

Tema 4 (Teorema di Riesz)

Sia $l : L^2 \to \mathbf{R}$ lineare e continuo. Provare che esiste una unica $g \in L^2$ tale che

$$l(f) = \int g\, f \quad \forall f \in L^2$$

Tema 5 . Enunciare e dimostrare il teorema di convergenza di Vitali

Esercizio 1 Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che

(i) $f \in L^t \Rightarrow f \in L^s$, e l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta

(ii) l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.

(iii) $f \in L^1 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x : \ |f(x)| \geq t\}) = \circ(\frac{1}{t})$ per t che va a zero o all'infinito.

Mostrare con un controesempio che tale comportamento non assicura la convergenza dell'integrale.

Esercizio 2 Sia $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2\|x\|^2}, \quad x \in \mathbf{R}^4$

(i) Stabilire per quali $p \geq 1$ risulta $\int_{\mathbf{R}^4} |f_n|^p < +\infty$

(ii) Stabilire se f_n converge in misura.

(iii) Stabilire per quali $p \geq 1$ risulta $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^p(\mathbf{R}^4)$.