AM5: Esercizi e problemi-II Settimana

Funzioni misurabili e sommabilità

Esercizio 1. Provare che f misurabile $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \Sigma \ \ \forall B \subset \mathbf{R}$ Boreliano.

Suggerimento. Osservare che la preimmagine di un aperto é misurabile (ogni aperto in $\mathbf{R}$ *é unione numerabile di intervalli aperti). Provare quindi che* $\{A \subset \mathbf{R} : f^{-1}(A) \in \Sigma\}$ *é sigma algebra.*

Esercizio 2. Sia f_n una successione di funzioni misurabili. Provare che l'insieme $\{x : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$ è misurabile.

Esercizio 3. Sia $f \geq 0$ misurabile in (X, Σ, μ). Provare che

$$\int_X f\, d\mu \;=\; \int_0^\infty \mu(\{f > t\})\, dt$$

(l'integrale a secondo membro è un integrale di Riemann..)

Suggerimento. Considerare dapprima le funzioni semplici..

Funzioni misurabili, sommabili secondo Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.

In alcuni degli esecizi seguenti é conveniente usare

Insieme di Cantor, funzione di Cantor

Dato un intervallo chiuso $I = [a, b]$, l'intervallo aperto $J := (a + \frac{b-a}{3}, b - \frac{b-a}{3})$ é "intervallo centrale", $I_1 = [a, a + \frac{b-a}{3}]$, $I_2 = [b - \frac{b-a}{3}, b]$ sono i "restanti". Iterando, a partire da $I_0 = [0, 1]$ l'operazione di "selezione" dell'intervallo centrale, si perviene alla decomposizione

$$[0, 1] = O \cup C, \qquad O := \cup_{n=1}^\infty \cup_{j=1}^{2^{n-1}} J_{nj}, \qquad C := \cap_{n=1}^\infty \cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}$$

ove J_{nj}, I_{nj} sono intervalli aperti (risp. chiusi) di lunghezza $\frac{1}{3^n}$, per cui

$$L^1(\cup_{j=1}^{2^n} I_{nj}) = (\frac{2}{3})^n, \qquad L^1(C) = 0, \qquad L^1(O) = 1$$

L'insieme C é **"insieme di Cantor"**.

Sia $$g_n(t) = (\frac{3}{2})^n \sum_1^{2^n} \chi_{I_{nj}}, \qquad f_n(x) = \int_0^x g_n(t)dt$$

Da $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in [0,1])$ segue che f_n converge uniformemente, diciamo ad f.

Tale funzione é detta **funzione di Cantor**. Ecco alcune delle sue proprietá:

f é non decrescente, $f(0) = 0, f(1) = 1,\ f \equiv cost.$ in $J_{nj} \quad \forall\ \ n, j$

$f(O) = \{\frac{k}{2^n} :\ \ k, n \in \mathbf{N}\,\}$. Dunque $f(O)$ é numerabile e $L^1(f(O)) = 0$

Dunque $L^1(f(C)) = 1$ (in particolare, C non é numerabile).

Esercizio 4. Sia $g(x) = \frac{x+f(x)}{2}$, $x \in [0,1]$, f funzione di Cantor.

Provare che g ha inversa continua e che $L^1(g(C)) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localmente Lipschtziana. Provare che f trasforma insiemi di misura (di Lebesgue) nulla in insiemi di misura nulla.

Mostrare con un esempio che le funzioni continue non hanno, in generale, questa proprietà.

Suggerimento. Usare la funzione di Cantor

Esercizio 6. Provare la falsitá della seguente affermazione

f misurabile $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow f(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Sia f la funzione di Cantor e A sottoinsieme non misurabile di $f(C)$ (che esiste perché $L^1(f(C)) > 0$), per cui $A = f(\{x \in C : f(x) \in A\})$

Esercizio 7. Provare la falsitá della seguente affermazione

f misurabile $E \subset \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile $\Rightarrow f^{-1}(E)$ é Lebesgue misurabile.

Suggerimento. Sia $f = g^{-1}$, g come nell'esercizio 4 ed $E = g^{-1}(A)$, $A \subset g(C)$ non misurabile.

Esercizio 8. É vero che $L^1(E) = 0 \Rightarrow E$ é boreliano ?

Suggerimento. Considerare l'insieme E dell'esercizio precedente.

Esercizio 9. Siano f, g Lebesgue misurabili in $\mathbf{R}$. Provare che

$g^{-1}(B)$ é boreliano se B é boreliano $\Rightarrow g \circ f$ é misurabile

e che la implicazione é falsa se g é soltanto misurabile.

Esercizio 10. Provare che ogni funzione monotona di $\mathbf{R}$ in se' é misurabile.

Esercizio 11. Sia H_s la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbf{R}^N$. Posto

$$dim_H(A) \ := \ \inf\{s \geq 0 : \ H^s(A) = 0\} \ \ \forall A \subset \mathbf{R}^N$$

provare che $\dim_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ (C:=insieme di Cantor)

Esercizio 12. Sia $B := \{x \in \mathbf{R}^n : \ \|x\| \leq 1\}$. Calcolare, usando l'esercizio 3

$$I_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_B \qquad\qquad J_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_{B^c}$$

e concludere che

$$I_p < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p < n, \qquad\qquad J_p < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad p > n$$

Esercizio 13. Sia f Lebesgue sommabile in $\mathbf{R}^N, f_h(x) := f(x - h), \ \ h \in \mathbf{R}^N$. Provare che

$$\int_{\mathbf{R}^N} f_h(x)dx \ = \ \int_{\mathbf{R}^N} f(x)dx$$

Suggerimento. Provarlo dapprima per le funzioni semplici..

Esercizio 14. Sia f sommabile in $\mathbf{R}$. Provare che

(i) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + k)$ converge assolutamente quasi per ogni $x \in \mathbf{R}$

(ii) $g := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x + k)$ è 1-periodica e sommabile in $[a, b]$ $\forall a < b$

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbf{R}} f_k \chi_{[0,1]}, \ \ f_k(x) := \ f(x + k)$

Esercizio 15. Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(\cos nx)^{n^4}$ converge quasi per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e diverge in un insieme denso in $[-\pi, \pi]$.

Suggerimento. Considerare $\sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx$

Esercizio 16. Sia $n \to r_n$ biiezione di $\mathbf{N}$ su $\mathbf{Q}$.

Provare che $\sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}} < \infty$ per quasi tutti gli $x \in \mathbf{R}$.

Suggerimento: Considerare $\int_a^b (\sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}})$ $a < b$.

Esercizio 17. Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^N$. Provare che

(i) $\int_{\mathbf{R}^N} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} L^N(\{x : |f(x)| > \frac{1}{2^n}\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume limitata.

(ii) $\int |f| < +\infty \Rightarrow \sum_n L^N(\{|f| > n\}) < \infty$

Si puó prescindere dall'ipotesi di limitatezza? É vero il viceversa?

Esercizio 18. Sia f misurabile in $\mathbf{R}^N$ e nulla fuori di una palla. Provare che

$\int_{\mathbf{R}^N} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n L^N(\{x : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty$

Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume a supporto compatto.

Esercizio 19. Sia μ misura su X, $E \subset X$ misurabile, $f : X \to \mathbf{R}$ misurabile, $p > 0$. Provare che

(i) $\mu(\{|f| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p} \int |f|^p$

(ii) $\int |f|^p < \infty \Rightarrow \mu(\{|f| \geq t\}) = \circ(\frac{1}{t^p})$

Provare con un esempio che $\mu(\{|f| \geq t\}) = \circ(\frac{1}{t^p})$ non implica $\int |f|^p < \infty$.

Suggerimento. Considerare $f(x) = \frac{1}{|x \log x|} \chi_{(0,\frac{1}{e})}$.

CENNI DI SOLUZIONE

Esercizio 2 $\{x : \exists \lim_n f_n(x)\} = \{x : \underline{\lim}_n f_n(x) = \overline{\lim}_n f_n(x)\}$

Esercizio 3 . Sia $\varphi = \sum_{j=1}^n t_j \chi_{E_j}$, $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$. Allora

$$\{x : \varphi(x) > t\} = \cup_{\{j:\ t_j > t\}} E_j \qquad \text{e quindi} \qquad \int_0^\infty \mu(\{\varphi > t\})dt =$$

$$= t_1 \sum_{j=1}^n \mu(E_j) + (t_2 - t_1) \sum_{j=2}^n \mu(E_j) + \ldots + (t_n - t_{n-1})\mu(E_n) = \sum_{j=1}^n t_j \mu(E_j) = \int \varphi$$

Poi, se $\varphi_n \to f$, $\varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f$, é $\{f > t\} = \cup_n \{\varphi_n > t\}$ unione crescente, e quindi $\mu(\{\varphi_n > t\}) \to \mu(\{f > t\})$ e quindi, per Beppo Levi,

$$\int_X f d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n d\mu = \lim_n \int_0^\infty \mu(\{\varphi_n > t\})dt = \int_0^\infty \mu(\{f > t\})dt$$

Esercizio 4 $\{x + f(x) :\ x \in J_{nj}\} = J_{nj} + c_{nj}$ se $f \equiv c_{nj}$ su J_{nj}. Dunque

$$L^1(g(O)) = \frac{1}{2} \sum_n \sum_{j=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{2} \quad \text{e quindi} \quad L^1(g(C)) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5 $|f(x) - f(y)| \le L\,|x - y| \ \Rightarrow\ l(f(I)) \le Ll(I)\ \ \forall I$ intervallo .
Poi, se f é la funzione di Cantor, $L^1(f(C)) = 1$.

Esercizi 6-7-8-9 Sia g come nell' esercizio 5. Sia $A \subset g(C)$ non misurabile (tale A esiste perché $g(C)$ ha misura positiva!), e sia $E = g^{-1}(A)$. Si ha:

6- $E \subset C$ ha misura nulla ed é quindi misurabile, mentre $g(E) = A$ non é misurabile.

7- Se $h := g^{-1}, h^{-1}(E) = g(E) = A$ non é misurabile.

8- Se E fosse boreliano, $A = g(E) = h^{-1}(E) =$ sarebbe misurabile.

9- Il controesempio é : $\chi_E \circ h = \chi_{h^{-1}(E)} = \chi_A$ (h come in 8-9). L'affermazione é ovvia: $\{g > c\}$ boreliano $\Rightarrow f^{-1}(\{g > c\})$ misurabile.

Esercizio 12 $L^n(\{x \in B : \frac{1}{\|x\|^p} > t\}) = vol(B) t^{-\frac{n}{p}}$ se $t \geq 1$ e vale $vol(B)$ se $t \leq 1$:

$$p < n \Rightarrow I_p = vol(B)[1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}}}] = vol(B)\frac{n}{n-p}, \quad p \geq n \Rightarrow I_p = +\infty$$

Calcoli analoghi per J_p.

Esercizio 14 Per Beppo Levi e numerabile additivitá dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)|\chi_{[0,1]}\right] dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |f(x+k)|dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f| < +\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| < +\infty$ per quasi ogni $x \in [0,1]$. Siccome $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+n+k)| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| \quad \forall n \in \mathbf{Z}$ é infatti $\sum_{-\infty}^{+\infty} |f(x+k)| < +\infty$ per quasi ogni $x \in \mathbf{R}$ e tale funzione é per l'appunto 1-periodica.

Infine $\int_0^1 |\sum_{-\infty}^{+\infty} f(x+k)|dx \leq \int_{\mathbf{R}} |f| < +\infty$ e quindi, per periodicitá, g é sommabile su ogni intervallo limitato.

Esercizio 15 Effettuando un cambio di variabile ed utilizzando la periodicitá del coseno, troviamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx = \frac{1}{n} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt$$

Siccome $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, vediamo che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n^4} dt = O(\frac{1}{n^2})$ e quindi, per Beppo Levi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4}\right] dx = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos nx)^{n^4} dx < +\infty$$

Dunque $\sum_{-\infty}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4} < +\infty$ quasi per ogni $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ed infatti, per periodicitá, quasi per ogni x.

Infine la serie diverge in ogni $x = \frac{2k\pi}{l}, \ k, l \in \mathbf{N}$.

Esercizio 16. $\int_{-M}^{M} \frac{dx}{\sqrt{|x-r_n|}}) \leq 8 \int_0^M \frac{dt}{\sqrt{t}} = 16\sqrt{M} \quad \Rightarrow$

$$\sum_n \int_{-M}^{M} \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}} \leq 16\sqrt{M} \quad \Rightarrow \quad \int_{-M}^{M} [\sum_n \int_{-M}^{M} \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}}]dx < \infty$$

$$\Rightarrow \quad \sum_n \frac{1}{2^n \sqrt{|x-r_n|}} < +\infty \quad \text{q.o.} x$$

Esercizio 17 Sia $g(t) = L^N(\{|f| > t\})$, cosicché g é monotona decrescente e

$$(i)\ \int |f| = \int_0^\infty g(t)dt \ = \ \sum_{n=1}^\infty \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g + \int_1^\infty g, \quad g(\frac{1}{2^{n-1}})\frac{1}{2^n} \ \leq \ \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g \ \leq \ g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$$

Dunque $\displaystyle\int |f| \geq \sum_{n=1}^\infty \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} g \geq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$ mentre $\displaystyle\int_1^\infty g \leq g(1)\|f\|_\infty \Rightarrow$

$$\int |f| \leq g(1)\|f\|_\infty + \sum_{n=1}^\infty g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n} \leq \ max\{1, \|f\|_\infty\} \sum_{n=0}^\infty g(\frac{1}{2^n})\frac{1}{2^n}$$

Controesempio: $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x)\ \ x \in \mathbf{R}$. É

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} L^1(\{f > \frac{1}{2^n}\}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} < +\infty \qquad \text{ma l'integrale diverge}$$

(ii) $\int |f| = \int_0^\infty g \geq \sum_{n\geq 1} g(n)$ e quindi l'ipotesi di limitatezza non entra. Il viceversa é in generale falso: se $|f(x)| \leq 1 \ \ \forall x$ la serie converge (serie di zeri!) ma, in generale, $\int |f| = +\infty$.

Esercizio 18 Come sopra,

$$\int |f| = \int_0^1 g + \sum_{n=0}^\infty \int_{2^n}^{2^{n+1}} g \geq g(1) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty 2^n g(2^n) \geq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^\infty 2^n g(2^n)$$

indipendentemente dal fatto che f sia a supporto compatto.

Viceversa, se $f \equiv 0$ fuori della palla B_r, allora $L^N(\{|f| > 0\}) \leq vol(B_r)$ e quindi $g \leq vol(B_r)$ e quindi

$$\int |f| = \int_0^1 g + \sum_{n=0}^\infty \int_{2^n}^{2^{n+1}} g \leq vol(B_r) + \sum_{n=0}^\infty 2^n g(2^n)$$

Controesempio. $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{[2,+\infty)}(x)$: la serie é una serie di zeri, ma l'integrale diverge.

Esercizio 19

$$(i-ii) \int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f| \geq t\}) \Rightarrow \mu(\{|f| \geq t\}) \leq \frac{1}{t^p}\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p = \frac{1}{t^p} \circ (1)$$

perché

$$\int_{\{|f|\geq t\}} |f|^p \to_{t\to+\infty} \int_{\{|f|=+\infty\}} |f| = 0 \quad \text{se} \quad \int |f|^p < +\infty$$

AM5: Esercizi e problemi-III Settimana

Esercizio 1. Siano f_n misurabili, $0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x)$ per ogni n e q.o. x. Provare che $\quad \exists n: \quad \int f_n < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int f_n \to \int \lim f_n$
e che l'ipotesi $\quad \exists n: \ \int f_n < +\infty \quad$ é essenziale.

Esercizio 2. Provare che $\quad f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad \int |f| \le \sup \int |f_n|$

Esercizio 3. Sia μ la misura che conta su un certo insieme X. Provare che $\int_X |f|\, d\mu = \sup\{\sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)| : \ A \subset X, A \text{ finito }\}$ e che
$\int_X |f|\, d\mu < +\infty \quad \Rightarrow \quad \{x : \ f(x) \ne 0\}$ é al piú numerabile.

Esercizio 4. Provare che se $\sum f_n(x)$ converge quasi per ogni x ed esiste g sommabile tale che $|\sum_1^n f_j(x)| \le g(x)$ quasi per ogni x, allora $\sum f_n$ è sommabile e $\int \sum f_n = \sum \int f_n$.

Esercizio 5. Sia $\quad \mu(X) < \infty. \quad$ Provare che

$$\int |f| < +\infty \ \Leftrightarrow \ \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{x : |f(x)| \ge n\}) < +\infty$$

Esercizio 6. Sia $\int |f_n - f| \to 0$. Provare che

$$(i) \ \ \forall\, \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ \ \mu(A) \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ \sup_n \int_A |f_n| \ \le \ \epsilon$$

$$(ii) \ \ \forall \epsilon > 0, \ \exists A_\epsilon : \ \ \mu(A_\epsilon) < \infty \ \text{ e } \ \sup_n \int_{A_\epsilon^c} |f_n| \ \le \ \epsilon$$

Esercizio 7. Provare che $\int_A e^{inx} dx \to 0 \forall A \subset [0, \pi]$ misurabile.

Dedurre che , se $n_k < n_{k+1}$, l'insieme $\{x \in [0, \pi] : \sin(n_k x)$ converge $\}$ è di misura nulla.

Suggerimento. Posto $A = \{x : \ \exists \lim_k \sin(n_k x)\}$, $\ f(x) := \lim \chi_A \sin(n_k x)$, *considerare* $\lim_k \int_0^\pi \sin(n_k x) \chi_{\{f \ge 0\}} \cdots$

Esercizio 8. Sia $f \in C(\mathbf{R})$ 1-periodica. Provare che $\int_0^1 f = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_1^N f(n\alpha) \forall \alpha$ irrazionale .

Suggerimento: provarlo dapprima per $f = e^{2\pi kix}$.

CENNI DI SOLUZIONE.

Esercizi 1-2-4. Seguono da Lebesgue e Fatou.

Esercizio 7. Da Bessel:

$$\sum_n |\int_0^{2\pi} e^{int}\chi_A dt|^2 \le \|\chi_A\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} e^{int}\chi_A dt \to_n 0$$

Poi, se $f(x) := \lim \sin(n_k x)$ in $A := \{x : \exists \lim_k \sin(n_k x)\}$, per quanto sopra si ha

$$0 = \lim_k \int_0^{\pi} \sin(n_k x)\chi_{\{f\ge 0\}} = \int_0^{\pi} f\chi_{\{f\ge 0\}}$$

e quindi $f^+ = 0$ q.o. ed, analogamente per f^- e quindi $\sin n_k x \to 0$ q.o. in A.

Analogo risultato per $\cos n_k x$. e quindi

$$1 = \sin^2 n_k x + \cos^2 n_k x \to 0 \qquad \text{q.o. in} \quad A \quad \Rightarrow \quad A \quad \text{ha misura nulla}$$

Esercizio 8. Basta mostrare che

$$\int_0^1 f = 0 \Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_1^N f(n\alpha) = 0$$

Questo é ovvio per $f = e^{2\pi kix}, k \ne 0$, perché in tal caso

$$\sum_0^N f(n\alpha) = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}, \;\; z := 2k\pi\alpha i \ne 1$$

Quindi é vero per ogni polinomio trigonometrico a media nulla. Infine, sia p_ϵ tale che $\|f-p_\epsilon\|_\infty \le \epsilon$. Allora

$$|\frac{1}{N}\sum_1^N f(n\alpha)| \le$$

$$\le \frac{1}{N}\sum_1^N |f(n\alpha) - p_\epsilon(n\alpha)| + \frac{1}{N}\sum_1^N p_\epsilon(n\alpha)| \le$$

$$\le \epsilon + |\frac{1}{N}\sum_1^N p_\epsilon(n\alpha)| \to_N \epsilon$$

AM5: Esercizi e problemi-IV Settimana

Esercizio 1. Siano $X = Y = [0,1]$

Siano μ la misura di Lebesgue e ν la misura che conta. Sia $D = \{(x,x) : x \in [0,1]$.

Provare che D é $\mu \times \nu$-misurabile e calcolare $(\mu \times \nu)(D)$.

Provare che $\nu(D_x)$ é μ-misurabile, che $\mu(D^y)$ é ν-misurabile.

É $\int_X \nu(D_x) d\mu = \int_Y \mu(D^y) d\nu$?

Esercizio 2. Siano $X = Y = [0,1]$ muniti della misura di Lebesgue . Siano

$$I_0 = [0, \frac{1}{2}], I_1 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}], \dots I_n = [\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}], \quad n \in \mathbf{N}$$

$$R_j = I_{j-1} \times I_{j-1}, \qquad \hat{R}_j = I_j \times I_{j-1}, \qquad j \in \mathbf{N}$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1} \chi_{R_n} - 2^{2n} \chi_{\hat{R}_n}$$

Mostrare che $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) dx) dy$, $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y) dy) dx$ esistono entrambi ma sono diversi.

Perché non si applica in questo caso il Teorema Fubini-Tonelli?

Esercizio 3 Provare che $L^{n+m} = L^n \times L^m$

CONVERGENZA IN MISURA E TEOREMA DI VITALI

Siano f_n misurabili. f_n converge a f in misura se

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) \to_n 0 \ \ \forall \epsilon > 0$$

Problema 1. Provare che

$$\int |f_n - f| \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad f_n \to f \text{ in misura}$$

Problema 2. Provare che

$$f_n \to f \text{ in misura} \qquad \Rightarrow \qquad \exists n_k \to \infty : \; f_{n_k} \to f \;\; q.o.$$

Problema 3 (Teorema di Vitali) . Siano f_n sommabili tali che

(i) $f_n \to f$ in misura

(ii) $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta_\epsilon > 0 : \;\; \mu(A) \le \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; \sup_n \int_A |f_n| \;\le\; \epsilon$

(iii) $\forall \epsilon > 0,\ \exists A_\epsilon : \;\;\; \mu(A_\epsilon) < \infty$ e $\sup_n \int_{A_\epsilon^c} |f_n| \;\le\; \epsilon$

Provare che f é sommabile e $\int |f_n - f| \to 0$.

Problema 4. Siano f_n misurabili, A misurabile di misura finita. Provare che

$$f_n \to f \;\; q.o. \;\Rightarrow \mu(\{x \in A : \; |f_n(x) - f(x)| \ge \epsilon\}) \to_n 0$$

Problema 5 (Teorema di Egoroff).

Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $0 \ge f_n$ misurabili, $f_n(x) \to 0 \;\; \forall x$. Provare che

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \;\; \text{misurabile} \;\;\; : \;\; \mu(A_\epsilon) \le \epsilon \;\; \text{e} \;\; f_n \to 0 \quad \text{uniformemente in} A \setminus A_\epsilon$$

Suggerimento. Provare che $\forall j, \epsilon, \;\; \exists n(\epsilon, j) : \;\; \mu(\cup_{n \ge n(\epsilon,j)} \{g_n \ge \frac{1}{j}\}) \;\le\; \frac{\epsilon}{2^j}$ *e considerare* $A_\epsilon := \cup_j \; \cup_{n \ge n(\epsilon,j)} \{g_n \ge \frac{1}{j}\}$

Esercizio 1. Sia

$$f_n(x) = |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n}, \; x \in (0, 2\pi), \;\; k_n \in \mathbf{N}, p_n \to +\infty$$

Provare che f_n converge a zero in misura.

Sugg. Confrontare $L^1(\{x : |\sin(k_n x + t_n)|^{p_n} \ge \epsilon\})$ *con* $L^1(\{x : |\sin x|^{p_n} \ge \epsilon\}$

Esercizio 2. Discutere convergenza puntuale, uniforme, in media, in misura:

$(i) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \ x \in (0,1), \quad f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \ x \in (1,+\infty)$

$(ii) f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \ x \in (0,1), \quad f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \ x \in (1,+\infty)$

$(iii) f_n(x) = \frac{n^2x^2}{n^4+x^2}, \ x \in (1,+\infty)$

$(iv) f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^4)\log(n+1)}$

Esercizio 3. Siano f_n, g misurabili in $\mathbf{R}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ per quasi tutti gli x. Provare che

$$L^1(\{g \geq \epsilon\}) < \infty \ \ \forall \epsilon > 0, \quad f_n \to 0 \, q.o. \Rightarrow f_n \to 0 \ \text{ in misura}$$

Suggerimento. $L^1(\{|f_n| \geq \epsilon\}) \leq L^1(\{|g(x)| \geq \epsilon\})$*....*

Esercizio 4. Sia $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \cap [0,1]$ biiezione. Siano

$$\Phi(k) = \frac{m_k}{n_k}, m_k, n_k \quad \text{primi tra loro} \qquad f_k(x) = e^{-(m_k - n_k x)^2}, x \in [0,1]$$

Provare che f_k tende a zero in misura, mentre $\lim f_k(x)$ non esiste per alcun x.

Suggerimento. Trovare le x che soddisfano la diseguaglianza $(m_k - n_k x)^2 \leq \log \frac{1}{\epsilon}$. Usare poi il fatto che per ogni x esistono razionali m_k, n_k tali che $|x - \frac{m_k}{n_k}| \leq \frac{1}{n_k^2}$. Considerare a parte il caso x razionale.

Esercizio 5.

(i) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ in misura ma $\int |f_n| \geq 1$

(ii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma $\int |f_n| \geq 1$

(iii) Trovare f_n misurabili tali che $f_n \to 0$ q.o. ma non in misura

(iv) Trovare $f_n : [0,2] \to \mathbf{R}$ tali che $f_n(x) \to 0$ $\forall x$ ma non in misura
Suggerimento. $f_n = \chi_{\cup_{j \geq n}}(Z + q_j)$...

CENNI DI SOLUZIONE

Esercizio 1. $D = \cap_n \cup_{i=1}^n [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Dunque D é misurabile nel prodotto.

Poi, $\nu(D_x) \equiv 1$, $\mu(D^y) \equiv 0$, $\int_X \nu(D_x) d\mu = 1 \neq 0 = \int_Y \mu(D^y) d\nu$.

Esercizio 2. $y \in I_{n-1} \quad \Rightarrow$

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \frac{2^{2n-1}}{2^n} - \frac{2^{2n}}{2^{n+1}} = 0 \quad \Rightarrow \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy = 0$$

mentre $$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy \equiv 1$$

$$\frac{1}{2} < x \leq 1 \quad \Rightarrow \int_0^1 f(x,y)dy \equiv -2^n + 2^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3 Basta considerare il caso $n = m = 1$.

Basta provare che $L^2 \leq L^1 \times L^1$. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ tale che $(L^1 \times L^1)(A) < +\infty$ e sia quindi $A \subset \cup_j A_j \times B_j \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ Lebesgue misurabili tali che $\sum_j L^1(A_j) L^1(B_j) < +\infty$. Siano quindi $A_j \subset \cup_i I_{ij}$, $B_j \subset \cup_k J_{kj}$ con

$$\sum_i l(I_{ij}) \leq L^1(A_j) + \epsilon a_j, \ \sum_k l(J_{kj}) \leq L^1(B_j) + \epsilon b_j$$

per cui $A \subset \cup_{ikj} I_{ij} \times J_{kj}$ e quindi

$$L^2(A) \leq \sum_{ikj} l(I_{ij}) \ l(J_{kj}) \leq \sum_j (L^1(A_j) + \epsilon a_j) \ (L^1(B_j) + \epsilon b_j) =$$

$$= \sum_j [L^1(A_j) \ (L^1(B_j)] + \epsilon \sum_j [L^1(A_j) b_j + L^1(B_j) a_j] + \epsilon^2 \sum_j a_j b_j$$

Prendendo $a_j = L^1(A_j)$, $b_j = L^1(B_j)$ troviamo

$$L^2(A) \leq (1+\epsilon)^2 \sum_j [L^1(A_j) \ (L^1(B_j)]$$

e quindi $L^2(A) \leq (1+\epsilon)^2 (L^1 \times L^1)(A)$.

Problema 1 Segue da $\int |f_n - f| \geq \epsilon \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\})$.

Problema 2 Sia $g_n := |f_n - f|$. Dall'ipotesi:

$$\forall j\ \exists n_j :\ \mu(\{g_n \geq \frac{1}{j}\}) \leq \frac{1}{2^j}\ \ \forall n \geq n_j$$

Dunque $\mu(\cap_k \cup_{j\geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\}) = 0$. Ma

$$x \notin \cap_k \cup_{j\geq k} \{g_{n_j} \geq \frac{1}{j}\} \ \Rightarrow\ \exists k :\ g_{n_j}(x) \ <\ \frac{1}{j}\ \forall j \geq k$$

cioé $g_{n_j}(x) \to 0$

Problema 3 Dal Problema 2 segue che f é misurabile e, per Fatou, $\int_A |f| \leq \sup_n \int_A |f_n|$ per ogni misurabile A. In particolare, se A_ϵ é come in (iii), $\int_{A_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$ e, per (ii), $\int_A |f| \leq \epsilon$ se $\mu(A) \leq \delta_\epsilon$. Dall'ipotesi (i) segue che

$$\exists n_\epsilon :\ \ n \geq n_\epsilon \Rightarrow \mu(\{x \in A_\epsilon :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{\mu(A_\epsilon)}\} \leq \delta_\epsilon$$

e quindi, per (ii),

$$\sup_m \int_{A_{\epsilon,n}} |f_m| \leq\ \epsilon\ \ \forall n \geq n_\epsilon$$

Si conclude che

$$\int |f_n - f| \ \leq\ \int_{A_\epsilon^c} (|f_n| + |f|) \ +\ \int_{A_\epsilon \setminus A_{\epsilon,n}} |f_n - f| \ +\ \int_{A_{\epsilon,n}} (|f_n| + |f|) \ \leq 5\epsilon.$$

Problema 4. Sia $g_n := |f_n - f|$. Sia

$$A_0 := \{x \in A :\ g_n \to 0\} \ =\ \cap_j \cup_n \cap_{k\geq n} \{x \in A :\ g_k \leq \frac{1}{j}\}$$

Dall'ipotesi, essendo $\mu(A) < \infty$, é:

$$0 = \mu((A \setminus A_0) \ =\ \mu(A \cap [\cup_j \cap_n \cup_{k\geq n} \{x \in A :\ g_k \ >\ \frac{1}{j}\}])$$

e quindi $\mu(\cap_n \cup_{k\geq n} \{x \in A :\ g_k \ >\ \frac{1}{j}\}) = 0\ \ \forall j$.

Da $\mu(A) < \infty$ segue infine

$$\mu(\{x \in A :\ g_k \ >\ \frac{1}{j}\}) \ \leq\ \mu(\cup_{k\geq n}\{x \in A :\ g_k \ >\ \frac{1}{j}\}) \to 0$$

AM5: Esercizi e problemi- VI Settimana

Problema 1 . Provare che

$$L^p \quad \text{separabile} \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \Rightarrow \quad L^q \quad \text{separabile}$$

e, piú in generale, se E é un Banach, allora

$$E' \quad \text{separabile} \qquad \Rightarrow \quad E \quad \text{separabile}$$

Provare con un esempio che l'implicazione E separabile $\Rightarrow$ E' separabile é falsa.

Suggerimento. Usare il 'fatto' seguente: se V é sottospazio chiuso proprio di E, allora esiste un $x' \in E'$, $x' \neq 0$ tale che $x'(x) = 0$ per ogni $x \in V$

Problema 2. Sia $p \geq 2$. Provare che $\|.\|_p$ é **uniformemente convessa**:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad \|f\|, \|g\| \leq 1 \quad \|f-g\|_p \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f+g}{2}\|_p \leq 1-\delta_\epsilon$$

Suggerimento: usare la diseguaglianza di Hanner

Problema 3. Sia $p \geq 2$. Provare che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Suggerimento: usare la uniforme convessitá della norma

Esercizio 1 . Dare un esempio di L^p non separabile.

Esercizio 2. Sia $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p, $p > 1$.

(i) Provare con un esempio che f_n può non convergere in alcun punto, può non convergere in misura. Può accadere che f_n non abbia alcuna sottosuccessione convergente q.o.?

(ii)Provare che se $f_n(x) \to g(x)$ q.o. allora $g = f$ q.o.

(iii) Provare che se $\int |f_n|^p \to \int |f|^p$ allora f_n ha almeno una sottosuccesione convergente q.o. ad f.

Esercizio 3 Sia $f_n \to f$ quasi ovunque. Provare che

$$\mu(E) < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \chi_E \to f \chi_E \quad \text{in misura}$$

Esercizio 4 Sia $f_n \in L^p$ limitata: $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$. Provare che

$f_n \to f$ q.o., oppure in misura, $\quad \Rightarrow \quad$ f_n converge a f debolmente.

Suggerimento Fissata $\phi \in L^1 \cap L^q$, usare la diseguaglianza

$$|\int (f_n - f)\phi| \leq (||f_n||_p + ||f||_p)(\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\delta\}} |\phi|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |\phi|$$

Esercizio 5 Siano $f_n \in L^p$. Provare che

(i)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(ii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iv)$f_n \to f$ q.o., $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(v)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ debolmente $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vi)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vii)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

Esercizio 6 Sia $f \in L^p$. Provare che

(i) $\mu(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |f|^p \geq t\}) \leq \frac{||f||_p^p}{t}$

(ii) $t^p \mu(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |f(x)| \geq t\}) \to 0$ al tendere di t a 0 e a $+\infty$.

Provare con un esempio che tale condizione non garantisce l'appartenenza di f ad L^p.

(iii) Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $f_n \in L^p, p > 1$, tale che $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$, e $f_n \to f, q.o.$. Provare che $f_n \to f$ in $L^q \quad \forall q < p$.

CENNI DI SOLUZIONI

Problema 1 . Sia D denso in L^p. Sia $g \in L^q$. Allora

$$f := |g|^{q-2} g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \exists f_n \in D : \quad f_n \to f \quad q.o. f_n \quad \text{equidominata in} \quad L^p$$

$$\Rightarrow \quad g_n := |f_n|^{p-2} f_n \to |f|^{p-2} f = g \quad \text{equidominata in} \quad L^q$$

$$\Rightarrow \quad \{|f|^{p-2} f : \quad f \in D\} \quad \text{é denso in} L^q$$

Sia E' separabile, $\{x'_n : \quad n \in \mathbf{N}\}$ denso in E'. Sia

$$x_n \in E : \qquad \|x_n\| = 1, \quad x'_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|. \qquad \text{Allora}$$

$$x'(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\|x'_n\| \leq x'_n(x_n) = x'_n(x_n) - x'(x_n) \leq \|x'_n - x'\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \quad \|x'\| \leq \|x' - x'_n\| + \|x'_n\| \leq 3\|x' - x'_n\| \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad x' = 0$$

Ció comporta che V, chiusura di $< x_n >$, é densa (altrimenti esisterebbe $x' \in E'$, non nullo che si annulla su V) e quindi anche l'insieme delle combinazioni lineari degli x_n e a coefficenti razionali (che é un insieme numerabile) é denso in E.

Un esempio é dato da l^1, che é separabile (le combinazioni lineari dei vettori $e_i, i \in \mathbf{N}, \; e_i(j) = \delta_{ij}$ sono dense in l^1) mentre il suo duale, che é l^∞, non é separabile: l'insieme $\{x_{ij} = e_i + e_j : \quad i, j \in \mathbf{N}\}$ é non numerabile e $i, j \neq l, m \quad \Rightarrow$ $\|x_{ij} - x_{l,m}\|_\infty = \sup_n |x_{ij}(n) - x_{l,m}(n)| = 1$ e quindi esiste una famiglia non numerabile di palle disgiunte; un insieme denso, dovendo intersecare ogni palla, é dunque necessariamente non numerabile.

Problema 2. Da Hanner (scriveremo $\|.\|_p = \|.\|$):

$$\|f\| = \|g\| = 1 \quad \Rightarrow \quad 2^p \geq \|f+g\|^p + \|f-g\|^p \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f+g}{2}\|^p \leq 1 - \epsilon$$

se $\|\frac{f-g}{2}\|^p \geq \epsilon$. Ora, supponiamo esistano f_n, g_n con

$$\|f_n\|, \|g_n\| \leq 1 : \quad \|\frac{f_n - g_n}{2}\| \geq \delta \quad \text{e} \quad \|\frac{f_n + g_n}{2}\| \to 1$$

Intanto $\|f_n\|, \|g_n\| \to 1$, perché $\|f_n\| + \|g_n\| \leq r < 2 \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f_n+g_n}{2}\| \leq \frac{r}{2} < 1$.

$$\text{Dunque} \qquad \|f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|}\| \to 0, \quad \|g_n - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 0$$

ovvero $\quad f_n = \dfrac{f_n}{\|f_n\|} + z_n,\ \ z_n \to 0, \quad g_n = \dfrac{g_n}{\|g_n\|} + w_n,\ \ w_n \to 0.$ Ora,

$$\|\frac{f_n}{\|f_n\|}-\frac{g_n}{\|g_n\|}\| = \|f_n-g_n+(w_n-z_n)\| \geq 2\delta-[\|w_n\|+\|z_n\|] \ \Rightarrow\ \|\frac{\frac{f_n}{\|f_n\|}+\frac{g_n}{\|g_n\|}}{2}\| \geq 1-\frac{\delta}{2}$$

mentre dovrebbe essere $\quad \lim_n \|\dfrac{\frac{f_n}{\|f_n\|}+\frac{g_n}{\|g_n\|}}{2}\| = \lim_n \|\dfrac{f_n+g_n}{2}\| = 1$

Problema 3. Facilmente,

$$\frac{f_n}{\|f_n\|} \rightharpoonup \frac{f}{\|f\|} \quad \text{e} \quad \|\frac{f_n}{\|f_n\|}-\frac{f}{\|f\|}\|_p \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Possiamo quindi supporre, ($f \neq 0$ e) dividendo per $\|f_n\|$, $\quad \|f_n\| = \|f\| = 1$.

Quindi $\quad f_n \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f_n+f}{2} \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \liminf \|\dfrac{f_n+f}{2}\| \geq \|f\| = 1$

Dall'uniforme convessitá segue allora che $\quad \|f_n - f\|_p \to 0$.

Esercizio 1 . Sia X insieme non numerabile, dotato della misura che conta . Gli elementi di $L^p(X,\mu)$ dati da $\quad f = \chi_{\{x\}}, x \in X \quad$ hanno la proprietá

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$$

Dunque esiste in $L^p(X,\mu)$ un insieme non numerabile di palle disgiunte e quindi ogni insieme denso in $L^p(X,\mu)$, dovendo intersecare ognuna di queste palle, é necessariamente non numerabile.

Esercizio 3 $\quad f_n \to f$ quasi ovunque implica

$$0 = \mu(\{x \in E : \limsup_n |f_n(x)-f(x)| > 0\}) = \mu(\cup_j \cap_n \cup_{k\geq n}\{x \in E : |f_n(x)-f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

$$\geq \mu(\cap_n \cup_{k\geq n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

e quindi, dato che $\mu(E) < +\infty$, otteniamo

$$\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\} \leq \mu(\cup_{k\geq n}\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

$$\to_n \mu(\cap_n \cup_{k\geq n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\}) = 0$$

Esercizio 4 Sia $g \in L^1 \cap L^q$. Se $f_n \to f$ in misura, allora

$$\limsup_n |\int (f_n - f)\, g| \leq (||f_n||_p + ||f||_p) \limsup_n (\int_{\{x: |f_n(x)-f(x)| \geq \delta\}} |g|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |g|$$

$$\leq \delta \int |g| \quad \forall \delta > 0$$

Basta ora osservare che $L^1 \cap L^q$ é denso in L^q. Infatti, se $0 \leq g \in L^q$, é $g = \lim_N \sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j}$ con $\sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j} \in L^q$ e quindi anche in L^1. Poi, scrivi $g = g^+ - g^-$.

Se $f_n \to f$ quasi ovunque, e $g = \sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j} \in L^q$ e quindi $\mu(E_j) < +\infty$ $\forall j$ e quindi $f_n \to f$ in misura su ogni E_j, come sopra si ha che $\limsup_n |\int (f_n - f)\, g| = 0$.

Esercizio 5

(i) $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\exists f_{n_k} \to f$ q.o. Passando eventualmente di nuovo ad una sottosuccessione possiamo supporre $f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o. Dunque $f = \overline{f}$ q.o.

(ii) come in (i)

(iii) segue da (i), perché $f_n \to \overline{f}$ in L^p $\Rightarrow$ $f_n \to \overline{f}$ in misura

(iv) segue dal fatto che $f_n \to \overline{f}$ in L^p $\Rightarrow$ $\exists f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o.

(v) $\int f_n g \to \int fg$, $\int f_n g \to \int \overline{f} g$ $\forall g \in L^q$ $\Rightarrow$ $\int (f - \overline{f})g = 0$ $\forall g \in L^q$ $\Rightarrow$ $f - \overline{f} = 0$ q.o.

(vi)-(vii) $f_n \to f$ debolmente $\Rightarrow$ f_n limitata, fatto che, insieme a $f_n \to \overline{f}$ in misura oppure q.o. implica $f_n \to \overline{f}$ debolmente, e quindi $f = \overline{f}$ q.o. per (v)

Esercizio 6 $\int_{\{|f(x)| \geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f(x)| \geq t\})$ e $|f|^p \in L^1$ $\Rightarrow$

$$\mu(\{|f(x)| \geq t\}) \to_{t \to +\infty} \mu(\{|f(x)| = +\infty\}) = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\{|f(x)| \geq t\}} |f|^p \to_{t \to +\infty} 0$$

Esercizio 7 $\mu(X) < +\infty$, $f_n \to f, q.o.$ $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \to_n 0$. Dunque

$$\limsup_n \int |f_n - f|^q \leq \limsup_n \int_{\{x: |f_n(x)-f(x)| \geq \epsilon\}} |f_n - f|^q + \epsilon^q \mu(X) \leq$$

$$\limsup_n \left[\int_{\{x: |f_n(x)-f(x)| \geq \epsilon\}} |f_n - f|^p \right]^{\frac{q}{p}} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\})^{\frac{p-q}{p}} + \epsilon^q \mu(X) = +\epsilon^q \mu(X)$$

AM5: Esercizi e problemi-VIII Settimana

Problema 1. Sia μ, misura in $\mathbf{R}^n$ definita sulla classe dei Boreliani; μ si dice Borel regolare se per ogni Boreliano B risulta

(i) $\mu(B) = \inf\{\mu(O) : B \subset O, O \text{ aperto}\}$

(ii) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ compatto}\}$

Provare che, se μ é Borel regolare, finita sui compatti e positiva sugli aperti, ed é invariante per traslazione, allora é un multiplo della misura di Lebesgue.

Problema 2 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che

(i)f_t è misurabile, $\quad f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}}||f||_p$

Problema 3. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$\int |f(x) - \frac{1}{L^n(B_r)} \int_{B_r(x)} f(y)dy\,|\,dx \ \to_{r\to 0} 0$$

Problema 4. Siano f, g sommabili in $\mathbf{R}^n$. Stabilire se é vero che

f, g pari/dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é pari, $\quad$ f pari, g dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é dispari

Problema 5. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Provare che

(i) $B \subset \mathbf{R}^N$ boreliano di misura nulla $\Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in B\}$ ha misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Usare Fubini..

(ii) $A \subset \mathbf{R}^N$ di misura nulla $\Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in A\}$ ha misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

(iv) A Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in A\}$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Considerare B boreliano in $\mathbf{R}^N$ tale che $A \subset B, L^N(A) = L^N(B)$..

Problema 6 Sia $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile. Provare che $(x,y) :\to f(x-y)$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Scrivere, per $f \geq 0$, $f(x) = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{A_j}, f(x-y) = ...$ *ed usare l'esercizio precedente (nota che* $\chi_A(x-y) = \chi_{\{(x,y):\ x-y \in A\}}$*).*

Problema 7. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$f * \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \Rightarrow f = 0 \; q.o.$$

Problema 8. Provare che

$$f \in L^1(\mathbf{R}^N), \quad |g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad g * f \quad \text{é ben definita e continua}$$

Mostrare, utilizzando le funzioni $f = g = x^{-\frac{2}{3}}\chi_{[0,1]}$, che l'ipotesi di limitatezza su g é essenziale.

Problema 9. Provare che

$$f, g \in L^1(\mathbf{R}^N), \quad |g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad (g * f)(x) \to_{|x| \to +\infty} 0$$

Mostrare che l'ipotesi di limitatezza su g é essenziale.

Suggerimento. Considerare dapprima il caso $g \in C_0$

Esercizio 1. Siano $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\chi_{[-1,1]}$, $g(x) = \sum_n n^\alpha \chi_{[n, n+\frac{1}{n^\beta}]}$. Stabilire se , per $\beta > \alpha + 1$, $f * g$ é limitata

Esercizio 2. Sia $f \geq 0$ sommabile in $\mathbf{R}^n$, $r > 0$. Provare che

$$x \to \int_{B_r(x)} f(y)dy$$

é continua e dotata di massimo su tutto $\mathbf{R}^N$. Provare infine che

$$r \to \max_{\mathbf{R}^N} \int_{B_r(x)} f(y)dy$$

é continua.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x|(1+\log^2|x|)}}, x \in \mathbf{R}$. Provare che

(i) $f \in L^p$ se e solo se $p = 2$

(ii) $f \star \chi_{[-1,1]} \in L^p$ se e solo se $p \geq 2$.

AM5: Esercizi e problemi- VIII Settimana

CENNI DI SOLUZIONE

Problema 1 . Sia $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tale che $\int h dL^N = 1$.

Per ogni $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ risulta, usando Fubini applicato alla misura prodotto $\nu \times L^N$ e l'invarianza per traslazione:

$$\int f d\mu =$$

$$\int (\int f(y) d\mu) h(x) dL^N = \int (\int f(x+y) d\mu) h(x) dL^N = \int (\int f(x+y) h(x) dL^N) d\mu =$$

$$= \int (\int f(x) h(x-y) dL^N) d\mu = \int (\int h(x-y) d\mu) f(x) dL^N =$$

$$= c \int f dL^N$$

ove $c := \int h d\mu$. Dalle proprietá (i)-(ii) segue, come nel caso della misura di Lebesgue, che $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ é denso in $L^1(\mu)$, e quindi

$$\int_E d\mu = c \int_E dL^N \quad \forall E \quad \text{boreliano}$$

Problema 2. $\int |f(x) - \frac{1}{volB_r} \int_{B_r(x)} f(y) dy| dx \,| \leq$

$$\leq \frac{1}{r^N volB_1} \int \left(\int |f(x) - f(y)| \chi_{B_r(x)}(y)\, dy \right) dx =$$

$$\frac{1}{r^N volB_1} \int \left(\int |\, f(x) \; - \; f(x-z))| \, \chi_{B_1}(\frac{z}{r})\, dz \right) dx =$$

$$= \frac{1}{r^N volB_1} \int \left(\int |f(x) \; - \; f(x-r\xi)| \, \chi_{B_1}(\xi)\, r^N \, d\xi \right) dx =$$

$$= \frac{1}{volB_1} \int \left(\chi_{B_1}(\xi) \int |\, f(x) \; - \; f(x-r\xi)\, | dx \right) d\xi \to_{r\to 0} 0$$

perché $\int |f(x) - f(x-r\xi)| dx \to_{r\to 0} 0$ e c ' é equidominatezza:

$$\chi_{B_1}(\xi) \int |f(x) - f(x-r\xi)| dx \leq 2\|f\|_{L^1} \; \chi_{B_1}(\xi)$$

Problema 3. Se f, g sono entrambe pari o entrambe dispari, risulta

$$(f*g)(-x) = \int f(-x-y)g(y)dy = \int f(x+y)g(-y)dy = \int f(x-z)g(z)dz = (f*g)(x)$$

Allo stesso modo si vede che, se f, g sono l'una pari e l'altra dispari, allora $f * g$ é dispari.

Problema 5. Sia $B \subset \mathbf{R}^N$ boreliano, $p : (x, y) \to x - y$. Siccome p é continua, $p^{-1}(B)$ é boreliano:

$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbf{R}^N : p^{-1}(A)$ é boreliano $\}$ contiene i boreliani, perché (come si vede subito) $\mathcal{A}$ é σ - algebra e contiene i chiusi (p é continua!).

(i) Si puó quindi applicare Fubini all'insieme misurabile $p^{-1}(B)$:

$$[p^{-1}(B))]_x = x - B \quad \Rightarrow \quad L^N([p^{-1}(B))]_x) = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow$$

$$(L^N \times L^N)(p^{-1}(B)) = \int L^N(x - B)dL^N(x) = 0$$

(ii) Se $A \subset B, L^N(B) = 0, B$ boreliano, da $p^{-1}(A) \subset p^{-1}(B)$ ed (i) segue che $p^{-1}(A)$ ha misura nulla

(iii) Sia A di misura finita, $A \subset B$ boreliano con $L^N(A) = L^N(B)$ e quindi $B \setminus A$ ha misura nulla. Da

$$p^{-1}(A) = p^{-1}(B \setminus (B \setminus A)) = p^{-1}(B) \setminus p^{-1}(B \setminus A)$$

segue che $p^{-1}(A)$ é misurabile, perché, per (ii), $p^{-1}(B \setminus A)$ ha misura nulla e $p^{-1}(B)$ é (addirittura) boreliano.

Problema 7. In particolare,

$$\int f(y)g(-y)dy = 0 \quad \forall g \in C_0^\infty$$

Ora, se E é misurabile di misura finita, per ogni $\epsilon > 0$ esistono $K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon$ (rispettivamente compatto ed aperto) con $L^N(O_\epsilon) - \epsilon \leq L^N(E) \leq L^N(K_\epsilon) + \epsilon$. Quindi

$$\exists \quad \varphi_n \in C_0^\infty, \quad 0 \leq \varphi_n \leq 1 : \quad \varphi_n \to_n \chi_E \quad q.o. \quad \text{e quindi} \quad \|\varphi_n - \chi_E\|_{L^1} \to_n 0$$

e quindi $\displaystyle\int f\chi_E = 0 \quad \forall E$ misurabile. Concludiamo che $f = 0$

Problema 8. $\int |f(x-y)g(y)|dy \le c\int |f| \quad \forall x$ e quindi $f*g$ é definita $\forall x$ e

$$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)| \le c\int |f(x+h-y)-f(x-y)|dy = \int |f(z+h)-f(z)|dz \to_{|h|\to 0} 0$$

Infine, siano $$f = g = x^{-\frac{2}{3}}\chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbf{R})$$

É $f*g \in L^1, (f*g)(x) = 0$ se $x \le 0$ oppure $x \ge 2$ mentre $0 < x < 1 \Rightarrow$

$$(f*g)(x) = \int_0^1 \frac{1}{(x-y)^{\frac{2}{3}}}\chi_{[0,1]}(x-y)\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy = \int_0^x \frac{1}{(x-y)^{\frac{2}{3}}}\ \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy >$$

$$\int_0^x \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}y^{\frac{1}{3}}|_0^x = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \to_{x\to 0^+} +\infty$$

Problema 9. Fissati $k > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, e posto $A(k) := \{z : \ |f(z)| \ge k\}$, $A(k,x) := \{y : \ |f(x-y)| \ge k\} = x - A(k)$, risulta, per ogni $R > 0$

$$\int |f(x-y)g(y)|dy \le \|g\|_\infty \int_{|y|\le R} |f(x-y)|dy + \|g\|_\infty \int_{A(k,x)} |f(x-y)|dy + k\int_{|y|\ge R} |g(y)|dy$$

Siccome $\int |f(y)|dy \ge \int_{A(k)} |f(z)|dz \ge kL^N(A(k)) \Rightarrow L^N(A(k)) \to_{k\to+\infty} 0$, si ha

$$(\star) \qquad \int_{A(k,x)} |f(x-y)|dy = \int_{A(k)} |f(z)|dz \to_{k\to+\infty} 0$$ Dunque,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists k_\epsilon, \quad R_\epsilon : \quad \|g\|_\infty \int_{A(k_\epsilon,x)} |f(x-y)|dy \le \epsilon, \qquad k_\epsilon \int_{|y|\ge R_\epsilon} |g| \le \epsilon$$

e quindi $$\limsup_{|x|\to+\infty} \int |f(x-y)\, g(y)|dy \le \|g\|_\infty \limsup_{|x|\to+\infty} \int_{|y|\le R_\epsilon} |f(x-y)|dy \ + \ 2\epsilon$$

$$= \|g\|_\infty \limsup_{|x|\to+\infty} \int_{B_{R_\epsilon}(x)} |f(z)|dz \ + \ 2\epsilon = 2\epsilon$$

Controesempio: lo stesso del Problema 8.

Esercizio 1 . É $\int g = \sum_n \frac{n^\alpha}{n^\beta} < +\infty$ se $\beta - \alpha > 1$. Poi,

$$(f*g)(x) = \sum_n n^\alpha \int_{x-n-\frac{1}{n^\beta}}^{x-n} f(t)dt \quad \text{e} \quad 2\alpha > \beta > \alpha + 1 \quad \Rightarrow$$

$$(f*g)(k + \frac{1}{k^\beta}) = k^\alpha \int_0^{\frac{1}{k^\beta}} f(t)dt = \frac{1}{2}k^\alpha \sqrt{t}|_0^{\frac{1}{k^\beta}} = \frac{1}{2}k^{\alpha - \frac{\beta}{2}} \to_n +\infty$$

Esercizio 2. Se $\int_{B_r(x)} f(y)dy = 0 \quad \forall x$ allora il massimo é zero ed é realizzato in ogni punto. Se no, $\sup_x \int_{B_r(x)} f(y)dy > 0$. Ma

$$I(x) \ := \int_{B_r(x)} f(y)dy = \int f(y)\, \chi_{B_r(x)}(y)dy = \int f(y)\chi_{B_r}(x-y)dy = (f * \chi_{B_r})(x)$$

é continua in x (Problema 8) e va a zero all'infinito (Problema 9). Per il teorema di Weierstrass, I é dotata di massimo, diciamo

$$\sup_x \int_{B_r(x)} f(y)dy = \int_{B_r(x_r)} f(y)dy$$

Poi, per l'assoluta continuitá dell'integrale

$$\forall\epsilon,\ \exists\delta_\epsilon : \quad |r-\rho| \le \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |\int_{B_r(x)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x)} f(y)dy| \le \epsilon \quad \forall x \quad \Rightarrow$$

$$|\int_{B_r(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_\rho)} f(y)dy| \le$$

$$|\int_{B_r(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_r)} f(y)dy| + |\int_{B_\rho(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_\rho)} f(y)dy| \le 2\epsilon$$

Esercizio 3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x|^{\frac{p}{2}}(1+\log^2|x|)^{\frac{p}{2}}} = +\infty$$

se $p \ne 2$, perché se $p < 2$ f^p va a zero per x che va all'infinito , piú lentamente di $\frac{1}{|x|}$ mentre se $p > 2$ va all'infinito , per x che va a zero, piú rapidamente di $\frac{1}{|x|}$.

Infine,

$$f^2 \le \frac{1}{|x|\log^2|x|}$$

che é integrabile in zero e all'infinito perché $\frac{d}{dx}\frac{1}{\log x} = -\frac{1}{x\log^2 x}$.

Poi $$(f \star \chi_{[-1,1]})(x) = \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{|t|\,(1+\log^2|t|)}}$$

é una funzione continua, di potenza p-esima sommabile sse $p \ge 2$ perché

$$\frac{2}{\sqrt{(x+1)\,(1+\log^2(x+1))}} \le \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{|t|\,(1+\log^2|t|)}} \le \frac{2}{\sqrt{(x-1)\,(1+\log^2(x-1))}}$$