AM5: Tracce delle lezioni- VI Settimana

SPAZI L^p: COMPATTEZZA DEBOLE E DUALITÁ

Sia μ misura su X, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $\|.\|_p$ indicherá la norma in $L^p(X, \mu)$.

Definizione di convergenza debole in L^p. Sia $f_n \in L^p$:

$$f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f_n\, g\, d\mu \to \int f\, g\, d\mu \quad \forall\ g \in L^q$$

Uniforme limitatezza. $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p $\Rightarrow$ $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty$

Prova. Sostituendo $f_n - f$ ad f_n, possiamo supporre $f = 0$. Per assurdo (eventualmente passando ad una sottosuccessione), sia $\|f_n\|_p \geq 4^n$. Si ha

$$h_n := 4^n \frac{f_n}{\|f_n\|_p}, \qquad \|h_n\|_p = 4^n, \qquad \int h_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in L^q$$

$$g_n := \frac{|h_n|^{p-2} h_n}{\|h_n\|_p^{p-1}}, \qquad \int |g_n|^q = 1, \qquad \int h_n g_n = \|h_n\|_p = 4^n$$

Se

$$\sigma_1 := 1, \quad \sigma_n := sign\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n\, g_j\right) \quad \text{é} \quad \| \sum_{n}^{n+m} \frac{\sigma_j}{3^j} g_j \|_q \leq \sum_{n}^{n+m} \frac{1}{3^j} \to_n 0\ \forall m$$

e quindi, se $\hat{g} := \sum_1^\infty \frac{\sigma_j}{3^j} g_j \in L^q$, é $|\int h_n\, \hat{g}| =$

$$= |\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n g_j + \sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n g_j| \quad \geq \quad \left| |\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n\, g_j| - |\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n\, g_j| \right|$$

Ora, $|\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n g_j| = |\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n\, g_j + \frac{\sigma_n}{3^n} \int h_n\, g_n| \geq (\frac{1}{3})^n \int h_n\, g_n = (\frac{4}{3})^n$,

mentre $|\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int h_n\, g_j| \leq \sum_{j>n} \frac{4^n}{3^j} = \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^n$ e quindi $|\int h_n \hat{g}| \geq \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^n \to +\infty$,

contraddizione.

Proposizione.

(i) $\|f_n - f\|_p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p (ma non viceversa)

(ii) $f_n \rightharpoonup_n f,\ g_n \rightharpoonup_n g, \quad$ in $L^p,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha f_n + \beta g_n \rightharpoonup_n \alpha f + \beta g$ in L^p

(iii) $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p \quad \Rightarrow \quad \liminf \|f_n\|_p \geq \|f\|_p$

(iv) $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p, $g_n \to g$ in $L^q \quad \Rightarrow \quad \int f_n\, g_n \to_n \int f\, g$

(v) $\overline{< g_i >} = L^q$, $\int f_n\, g_j \to_n 0 \quad \forall j$, $\sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n 0$ in L^p

Prova. (i) $|\int (f_n - f)\, g| \leq \|f_n - f\|_p\, \|g\|_q \to_n 0 \quad \forall\, g \in L^q$ (ii) ovvia

(iii) $|\int f_n\, g| \leq \|f_n\|_p\, \|g\|_q \ \Rightarrow\ |\int f\, g| \leq (\liminf_n \|f_n\|_p)\, \|g\|_q \quad \forall\, g \in L^q \ \Rightarrow$

$$\int |f|^p \ = \ |\int f\, (|f|^{p-2}\, f)| \ \leq \ \liminf_n \|f_n\|_p\, \|\, |f|^{p-1}\, \|_q = \liminf_n \|f_n\|_p\, (\int |f|^p)^{\frac{1}{q}}$$

(iv) $\sup_n \|f_n|_p < +\infty \ \Rightarrow$

$$|\int (f_n g_n - f\, g)| \leq |\int (f_n - f) g| + |\int (g_n - g) f_n| \leq |\int (f_n - f) g| + \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q \to_n 0$$

(v) É $\int f_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in < g_j >$. Dato $g \in L^q$, siano $h_j \in < g_j >$ tali che $\|h_j - g\|_q \to_j 0$. Allora

$$|\int f_n g| \leq |\int f_n h_j| + \int |f_n||h_j - g| \quad \Rightarrow \quad \limsup_n |\int f_n g| \leq \|h_j - g\|_q \sup_n \|f_n\|_p \quad \forall j$$

e quindi $\limsup_n |\int f_n\, g| = 0$.

DISEGUAGLIANZA DI HANNER

$$1 \leq p \leq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\, \|f\|_p - \|g\|_p\, |^p \leq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$$
$$p \geq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\, \|f\|_p - \|g\|_p\, |^p \geq \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$$

NOTA. Scrivendo $\varphi := f + g$, $\psi := f - g$, e quindi $f = \frac{\varphi + \psi}{2}$, $g = \frac{\varphi - \psi}{2}$, le diseguaglianze si riscrivono nel modo equivalente

$$1 \leq p \leq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f+g\|_p + \|f-g\|_p)^p + |\, \|f+g\|_p - \|f-g\|_p\, |^p \leq 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

$$p \geq 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f+g\|_p + \|f-g\|_p)^p + |\, \|f+g\|_p - \|f-g\|_p\, |^p \geq 2^p \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

In particolare, se $p = 2$ ritroviamo la regola del parallelogramma, mentre se $p = 1$ si tratta di due modi di scrivere la diseguaglianza triangolare.

Prova. Siccome la diseguaglianza é simmetrica in f, g, e certamente vera se $\|f\|_p \ \|g\|_p = 0$, possiamo supporre $\|f\|_p \geq \|g\|_p > 0$. Dividendo per $\|f\|_p$, ed avendo posto $\hat{f} := \frac{f}{\|f\|_p}$, $\hat{g} := \frac{g}{\|g\|_p}$ la diseguaglianza si riscrive,

$$(*) \quad p \in [1,2]: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \ \Rightarrow \ (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \leq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$$

$$(*) \quad p \geq 2: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \ \Rightarrow \ (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \geq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$$

Ora, $(*)$ si puó derivare da

Una diseguaglianza elementare.

$$(**) \quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \leq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$$

$$(**) \quad 2 < p \quad \Rightarrow \quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \geq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$$

ove $a(r) := (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}$, $b(r) := r^{1-p}\,[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}]$.

Deriviamo $(*)$ da $(**)$: posto $r = \|g\|_p$, $t = \hat{f}(x)$, $s = \hat{g}(x)$ in $(**)$ ed integrando otteniamo (ad esempio nel caso $p \in (1,2)$)

$$a(r) + b(r)r^p \leq \|\hat{f} + \hat{g}\|_p^p + \|\hat{f} - \hat{g}\|_p^p$$

Ma $$a(r) + r^p b(r) = [(1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}] + r[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}] =$$

$$= (1+r)^p + (1-r)^p$$ e quindi appunto

$$(1 + \|\hat{g}\|_p)^p + (1 - \|\hat{g}\|_p)^p \leq \|\hat{f} + \hat{g}\|_p^p + \|\hat{f} - \hat{g}\|_p^p$$

Prova di $(**)$. Intanto, $(**)$ é vera per $t = 0$: $\forall r > 0$ si ha

$$b'(r) = \frac{p-1}{r^p}\,[\,(1-r)^{p-2} - (1+r)^{p-2}\,] > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad b'(r) < 0 \quad \text{se} \quad p > 2$$

Siccome $b(1) = 2^{p-1} < 2$ se $p < 2$ e $b(1) > 2$ se $p > 2$, si ha quindi che $1 < p < 2 \ \Rightarrow \ b(r) < 2$ in $(0,1]$ mentre $p > 2 \ \Rightarrow \ b(r) > 2$ in $(0,1]$. Ovvero $(**)$ vale per $t = 0$ e si puó dunque riscrivere, dividendo per $|t|^p$, nella forma equivalente

$$(**) \quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \leq |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

$$(**) \quad p > 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \geq |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

che infatti basta provare per ogni $\tau \geq 0$, perché la diseguaglianza é pari in τ.

Posto $\quad \gamma(r,\tau) := a(r) + b(r)\tau^p, \quad r \in (0,1], \tau \geq 0$, basta provare che

$$1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{0<r\leq 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \geq 0$$

$$p > 2 \quad \Rightarrow \quad \inf_{0<r\leq 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \geq 0$$

É $\quad a'(r) = (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}], \quad b'(r) = -\dfrac{a'(r)}{r^p}, \quad \gamma'(r) = a'(r)[1 - (\dfrac{\tau}{r})^p]$

$$a' < 0, \quad b' > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad a' > 0, \quad b' < 0 \quad \text{se} \quad p > 2 \quad \forall r > 0$$

In particolare, γ' si annulla esattamente in $r = \tau$, e $\gamma(\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p$ é un massimo se $p < 2$ ed un minimo se $p > 2$. Quindi

$$\tau \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad (**) \qquad \text{vale}$$

Sia infine $\tau > 1$. Per quanto visto, se $p < 2$ $\quad \delta := \frac{1}{\tau} < 1$ e $r \in (0,1]$ allora

$$a(r) + b(r)\delta^p \leq (1+\delta)^p + (1-\delta)^p \qquad \text{e quindi} \quad \tau^p a(r) + b(r) \leq (1+\tau)^p + (1-\tau)^p$$

e vale la diseguaglianza opposta se $p > 2$. Basta allora provare che $\quad \forall r \in (0,1]$

$$a(r) + b(r)\tau^p \leq a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p < 2$$

$$a(r) + b(r)\tau^p \geq a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p > 2$$

E ció segue dal fatto che $\quad p < 2 \quad \Rightarrow \quad a' - b' = a'(1 + \frac{1}{r^p}) < 0$ in $(0,1]$ $\quad$ e quindi

$$a(1) = b(1) = 2^{p-1} \quad \Rightarrow \quad a(r) \geq b(r) \quad \forall r \in (0,1] \quad \Rightarrow \quad [a(r) - b(r)]\,\tau^p \geq a(r) - b(r)$$

$$\Rightarrow \quad a(r) + \tau^p b(r) \leq \tau^p\, a(r) + b(r)$$

Se invece $p > 2$, é $a' - b' > 0$ in $(0,1]$, e quindi si ottiene la diseguaglianza opposta.

Proiezione su un convesso. Sia $1 < p$, $\quad C \subset L^p \quad$ chiuso e convesso. Allora

$$\forall f \in L^p, \quad \exists f_C \in C \quad \text{proiezione di f su C} \quad : \quad \|f - f_C\| \leq \|f - g\| \quad \forall g \in C$$

Prova. Sia $f_n \in C$ minimizzante: $\quad \|f_n - f\| \to_n d := \inf_{g\in C} \|f - g\|$.

Proviamo che f_n é di Cauchy, e quindi $\quad \exists\ f_C \in C = \overline{C}$ tale che $\|f_n - f_C\| \to_n 0$ e quindi $\quad \|f - f_C\| = d$. $\quad$ **Utilizzeremo la diseguaglianza di Hanner.**

Caso $p > 2$**.** Utilizziamo la versione in Nota, con $f_n - f_m$, $f_n + f_m - 2f$ al posto di $f,\ g$:

$$2^p\ [\ \|f_n - f_m\|_p^p\ +\ \|f_n + f_m - 2f\|_p^p\ ] \leq$$
$$\leq (\|2(f_n - f)\|_p + \|2(f_m - f)\|_p)^p + |\ \|2(f_n - f)\|_p - \|2(f_m - f)\|_p|^p \leq$$
$$\leq (4d)^p + \circ(1)$$

Siccome

$$C \quad \text{convesso} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_n + f_m}{2} \in C \quad \Rightarrow \quad \|f_n + f_m - 2f\|_p = 2\|\frac{f_n + f_m}{2} - f\| \geq 2d$$

mentre $\|f_n + f_m - 2f\|_p \leq \|f_n - f\|_p + \|f_m - f\|_p \to_{n,m} 2d$ risulta

$$\|f_n + f_m - 2f\|_p^p = (2d)^p(1 + \epsilon_{n,m}), \qquad 0 < \epsilon_{n,m} \to_{n,m} 0$$

Troviamo quindi

$$\frac{\|f_n - f_m\|_p^p}{2^p d^p} + \epsilon_{n,m} = \circ(1)$$

Caso $1 < p < 2$**.** Utilizziamo Hanner, con $f_n - f_m$, $f_n + f_m - 2f$ al posto di $f,\ g$:

$$(\|f_n - f_m\|_p + \|f_n + f_m - 2f\|_p)^p + |\|f_n - f_m\|_p - \|f_n + f_m - 2f\|_p|^p \leq$$
$$\leq \|2(f_n - f)\|_p^p + \|2(f_m - f)\|_p^p = 2^{p+1}d^p + \circ(1)$$

Posto $\rho_{n,m} := \frac{\|f_n - f_m\|_p}{2d}$ si ha, come sopra,

$$\frac{|\rho_{n,m} + 1 + \epsilon_{n,m}|^p + |1 + \epsilon_{n,m} - \rho_{n,m}|^p}{2} \leq 1 + \circ(1)$$

Ora, la stretta convessitá di $\Gamma(t) := |t|^p$ in $I_{n,m} := [1 + \epsilon_{n,m} - \rho_{n,m}), 1 + \epsilon_{n,m} + \rho_{n,m}]$ dá

$$\frac{\Gamma(1 + \epsilon_{n,m} + \rho_{n,m}) + \Gamma(1 + \epsilon_{n,m} - \rho_{n,m})}{2} \geq$$
$$\geq 1 + 2\epsilon_{n,m} + \frac{1}{2}|\rho^2 - \epsilon^2| \min_{t \in I_{n,m}} \Gamma''(t) \qquad \text{e quindi} \quad \rho_{n,m}^2 \leq \circ(1)$$

Proiezione 'ortogonale'. Sia V sottospazio lineare chiuso di L^p, $p > 1$. Sia $f \in V^c$, f_V *proiezione ortogonale* di f su V. Allora

$$\int |f - f_V|^{p-2}\,(f - f_V)\,v\ =\ 0 \quad \forall v \in V$$

Prova. Fissato $v \in V$, sia $\varphi(t) = \int |f - (f_V + tv|^p$. É $\varphi(0) \leq \varphi(t) \quad \forall t$ e quindi

$$0 = \varphi'(0) = \int |f - f_V|^{p-2} (f - f_V)\, v$$

Corollario (IL DUALE DI L^p É L^q) . Sia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\forall l \in (L^p)', \quad \exists!\ g = g_l \in L^q : \qquad l(f) = \int f\, g \quad \forall f \in L^p$$

Prova. Sia $V := Ker l$. Se $l \neq 0$, V é sottospazio lineare chiuso proprio di L^p. Sia $\hat{f} \in L^p$, $\hat{f} \in V^c$ e sia $\hat{f}_V$ la 'proiezione' di $\hat{f}$ su V. Se $\hat{g} := |f - f_V|^{p-2}(f - f_V)$, $\hat{g} \in L^q$ e

$$\int \hat{g}\, v \ = \int |f - f_V|^{p-2} (f - f_V)\, v \ = \ 0 \quad \forall v \in V$$

Sia $f \in L^p$: $\quad l(f - \frac{l(f)}{l(\hat{f})}\, \hat{f}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \hat{g}\, (f - \frac{l(f)}{l(\hat{f})}\, \hat{f}) = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{l(f)}{l(\hat{f})} \int \hat{g}\, \hat{f} = \int \hat{g}\, f \quad \Rightarrow \quad l(f) = \int g\, f, \qquad g := \left[\frac{l(\hat{f})}{\int \hat{g}\, \hat{f}} \right] \hat{g}$$

Teorema $(L^p)'$ é isometricamente isomorfo a L^q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Se $g \in L^q$, allora $l_g(f) := \int f\, g$ é definito in L^p per la diseguaglianza di Holder, ed é un funzionale lineare e continuo: $|l_g(f)| \leq \|f\|_p\, \|g\|_q$.

Dunque, l'applicazione $T : g \to l_g$, $g \in L^q$, manda, in modo lineare, L^q nel duale di L^p. Inoltre T é una isometria:

$$\|g\|_q = \|T(g)\| := \sup_{\|f\|_p = 1} \|T(g)\|, \quad \|T(g)\| := \sup_{\|f\|_p = 1} |l_g(f)| = \sup_{\|f\|_p = 1} |\int f\, g|$$

Infatti, in primo luogo, $\|T(g)\| \leq \|g\|_q$. Poi,

$$\|\, |g|^{q-2}\, g\, \|_p^p = \int |\, |g|^{q-2}\, g\, |^p = \int |g|^q = \|g\|_q^q \qquad \text{e quindi}$$

$$\|T(g)\| \ \geq \ \frac{|l_g(|g|^{q-2}\ g)|}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|g\|_q^{q - \frac{q}{p}} = \|g\|_q$$

Infine, T é suriettiva, per la Proposizione precedente.

Teorema (compattezza debole) Sia L^p separabile. Allora

$$\sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f \in L^p, \;\; n_k \to_k +\infty : \quad f_{n_k} \rightharpoonup_k f$$

Prova. Sia u_n densa in L^p. É facile vedere che $g_n := |u_n|^{p-2}u_n$ é denso in L^q. Siccome $\sup_n |\int f_n g_j| < +\infty \quad \forall j$ e quindi, per ogni j, la successione numerica $n \to \int f_n g_j$ ha una estratta convergente, si puó costruire, usando il metodo diagonale di Cantor , una sottosuccessione f_{n_k} tale che

$$l(g_j) := \lim_k \int f_{n_k} g_j \qquad \text{esiste finito} \quad \forall j$$

e quindi $l(g) := \lim_k \int f_{n_k} g$ esiste finito $\forall g \in < g_n >$. Inoltre, l é chiaramente lineare su $< g_j >$, e $|l(g)| \leq (\sup_n \|f_n\|_p) \, \|g\|_q \quad \forall g \in < g_j >$. Dunque l ha un (unico) prolungamento lineare e continuo su tutto L^p, che continuiamo ad indicare l. Dal teorema di rappresentazione:

$$\exists g \in L^q : \qquad l(f) = \int f \, g \qquad \forall f \in L^p$$

Per quanto sopra, $$\int f_{n_k} g_j \to_k l(g_j) = \int f g_j \quad \forall j$$

e ció é sufficente a garantire che $f_{n_k} \rightharpoonup_k f$.

Lemma di Mazur Sia C chiuso e convesso. Allora

$$f_n \in C, \quad f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Rightarrow \qquad f \in C$$

Prova. Per assurdo: $f \in C^c$, e quindi, indicata con f_C la sua proiezione su C, risulta $f \neq f_C$ e

$$\varphi_v(t) := \int |f - [tv + (1-t)f_C)]|^p \geq \int |f - f_C|^p = \varphi_v(0) \quad \forall v \in C, \quad \forall t \in [0,1]$$

e quindi $$0 \leq \varphi_v'(0) = \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)(f_C - v) \quad \forall v \in C$$

Quindi, preso $v = f_n$, si ha

$$0 < \int |f - f_C|^p = \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)f - \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)f_C \leq$$

$$\leq \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)f - \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C) \, f_n \to_n 0$$

contraddizione.

AM5: Esercizi e problemi- VI Settimana

Problema 1 . Provare che

$$L^p \quad \text{separabile} \quad , \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad \Rightarrow \quad L^q \quad \text{separabile}$$

e, piú in generale, se E é un Banach, allora

$$E' \quad \text{separabile} \qquad \Rightarrow \quad E \quad \text{separabile}$$

Provare con un esempio che l'implicazione E separabile $\Rightarrow$ E' separabile é falsa.

Suggerimento. Usare il 'fatto' seguente: se V é sottospazio chiuso proprio di E, allora esiste un $x' \in E'$, $x' \neq 0$ tale che $x'(x) = 0$ per ogni $x \in V$

Problema 2. Sia $p \geq 2$. Provare che $\|.\|_p$ é **uniformemente convessa**:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad \|f\|, \|g\| \leq 1 \quad \|f-g\|_p \geq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f+g}{2}\|_p \leq 1-\delta_\epsilon$$

Suggerimento: usare la diseguaglianza di Hanner

Problema 3. Sia $p \geq 2$. Provare che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Suggerimento: usare la uniforme convessitá della norma

Esercizio 1 . Dare un esempio di L^p non separabile.

Esercizio 2. Sia $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p, $p > 1$.

(i) Provare con un esempio che f_n può non convergere in alcun punto, può non convergere in misura. Può accadere che f_n non abbia alcuna sottosuccessione convergente q.o.?

(ii)Provare che se $f_n(x) \to g(x)$ q.o. allora $g = f$ q.o.

(iii) Provare che se $\int |f_n|^p \to \int |f|^p$ allora f_n ha almeno una sottosuccesione convergente q.o. ad f.

Esercizio 3 Siano $f_n \in L^p$. Provare che

$\sup_n ||f_n||_p < +\infty, f_n \to f$ q.o., oppure in misura, $\Rightarrow f_n$ converge a f debolmente.

Suggerimento Fissata ϕ limitata e misurabile, usare la diseguaglianza

$$|\int (f_n - f)\phi| \leq (||f_n||_p + ||f||_p)(\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\delta\}} |\phi|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |\phi|$$

Esercizio 4 Siano $f_n \in L^p$. Provare che

(i)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(ii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iv)$f_n \to f$ q.o., $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(v)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ debolmente $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vi)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vii)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

Esercizio 5 Sia $f \in L^p$. Provare che

(i) $\mu(\{x \in \mathbf{R}^n : |f|^p \geq t\}) \leq \frac{||f||_p^p}{t}$

(ii) $t^p \mu(\{x \in \mathbf{R}^n : |f(x)| \geq t\}) \to 0$ al tendere di t a 0 e a $+\infty$.

Provare con un esempio che tale condizione non garantisce l'appartenenza di f ad L^p.

(iii) Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $f_n \in L^p, p > 1$, tale che $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$, e $f_n \to f, q.o.$. Provare che $f_n \to f$ in $L^q \quad \forall q < p$.