AM5-2005: RECUPERO II ESONERO

TEMA 1.

Siano $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Provare che

$$f_n \in L^p, \quad \int f_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in L^q \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int |f_n|^p < +\infty$$

TEMA 2. Provare che

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f| < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbf{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p\, dx \to_{|h|\to 0} 0$$

TEMA 3. Siano $f_n \in L^1(\mathbf{R}^N)$.

Sia $\varphi \in C_0^\infty(B_1, [0,1])$, $\int \varphi = 1$, $\varphi_\epsilon = \epsilon^{-N} \varphi(\frac{x}{\epsilon})$, $R > 0$. Provare che

$$\sup_n \int |f_n| < +\infty \quad \text{e} \quad \sup_n \int_{B_R} |f_n(x+h) - f_n(x)| \to_{|h|\to 0} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sup_n \int_{B_R} |f_n - (\varphi_\epsilon * f_n)| \to_{\epsilon \to 0} 0$$

TEMA 4.

Sia $p > N$. Provare che

$$\forall\, R > 0\ \exists\ c = c(N,p,R) \ :\quad \|u\|_\infty \le c \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall u \in C_0^\infty(B_R)$$

TEMA 5.

Sia $N \geq 3$. Provare che

$$\forall f \in L^{\frac{2N}{N+2}}, \quad \exists\, !\, u \in \mathcal{D}^1 : \quad \int \nabla u\, \nabla \varphi = \int f\, \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Esercizio 1.

Sia f misurabile. Provare che

(i) $\sup_{p\geq 1} \|f\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^\infty$

(ii) $f \in L^1 \cap L^\infty \quad \Rightarrow \quad f \in L^p \quad \forall p > 1$ e $\|f\|_p \to_{p\to+\infty} \|f\|_\infty$

Esercizio 2.

Siano f, g sommabili in $\mathbf{R}^n$. Stabilire se é vero che

f, g pari (oppure dispari) $\Rightarrow$ $f * g$ é pari,

f pari, g dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é dispari

Esercizio 3.

Sia $\alpha \in [0, 1)$. Sia $f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha} \chi_{(0,1]}$.

Stabilire per quali α risulta $f_\alpha * f_\alpha \in C(\mathbf{R})$.

ISTRUZIONI.

1. Ogni Tema correttamente svolto dá 6 punti, per un massimo di 24 punti

2. Ogni esercizio correttamente svolto dá 6 punti.