AM5-2005: RECUPERO I ESONERO

TEMA 1. Dato un insieme X, sia $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$ σ- algebra di sottoinsiemi di X. Sia $f \geq 0$ funzione Σ - misurabile. Provare che esistono $E_j \in \Sigma$ tali che

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \chi_{E_j}(x) \quad \forall x \in X$$

TEMA 2.

Sia μ misura su X. Provare che le funzioni semplici sono dense in $L^1(\mu)$.

TEMA 3. Sia μ misura su X. Sia f sommabile. Provare che

$$(i) \quad \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ \delta_\epsilon > 0 :\ \mu(A) \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \int_A |f| \leq \epsilon$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists A_\epsilon :\ \mu(A_\epsilon) < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_{A_\epsilon^c} |f| \leq \epsilon$$

TEMA 4. Siano μ, ν misure su X, Y. Sia $\mu \times \nu$ σ finita, f $\mu \times \nu$- misurabile e tale che $\int_X (\int_Y |f|\, d\nu)\, d\mu < \infty$. Provare che

(i) $x \to f(x,y)$, $y \to f(x,y)$ sono sommabili per q. o. x, (risp. per q. o. y)

(ii) $y \to \int_X f(x,y)\, d\mu$, $x \to \int_Y f(x,y)\, d\nu$ sono sommabili e

$$\int_Y (\int_X f(x,y)\, d\mu)\, d\nu = \int_X (\int_Y f(x,y)\, d\nu)\, d\mu = \int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu)$$

TEMA 5.

(i) Siano f, g misurabili, $p,\ q > 1$, tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Provare che

$$\int |f\, g| \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} \ (\int |g|^q)^{\frac{1}{q}}$$

(ii) Siano $1 \leq p \leq q$. Provare che

$$f \in L^p \cap L^q \ \Rightarrow \ f \in L^r \quad \forall r \in [p,q] \quad \text{e} \quad \|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta\, \|f\|_q^{1-\theta}$$

ove $\theta \in [0,1]$ é tale che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Esercizio 1. Sia $B := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Siano

$$I_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_B \qquad\qquad J_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_{B^c}$$

Stabilire per quali p risulta

$$I_p < +\infty \qquad\qquad J_p < +\infty$$

Esercizio 2.

(i) Siano f_n misurabili, A misurabile di misura finita. Provare che

$$f_n \to 0 \quad q.o. \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in A : |f_n(x)| \geq \epsilon\}) \to_n 0 \ \forall \epsilon > 0$$

(ii) Dedurre che, se f_n, g sono misurabili e $|f_n(x)| \leq g(x)$ per q. o. x, allora

$$L^1(\{g \geq \epsilon\}) < \infty \quad \forall \epsilon > 0, \quad f_n \to 0 \ \ q.o. \quad \Rightarrow \quad f_n \to 0 \quad \text{in misura}$$

Suggerimento. $L^1(\{|f_n| \geq \epsilon\}) \leq L^1(\{|g(x)| \geq \epsilon\})$*....*

Esercizio 3. Sia $f_n \in L^p, p > 1$. Sia $\sup_n \|f_n\|_{L^p} < +\infty$. Sia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Provare che $$f_n \to 0 \ \ q.o. \quad \Rightarrow \quad \int f_n \, g \to 0 \ \ \forall g \in L^q$$

ISTRUZIONI.

1. Ogni Tema correttamente svolto dá 6 punti, per un massimo di 24 punti

2. Ogni esercizio correttamente svolto dá 6 punti.