AM5-2005: I APPELLO

TEMA 1.

Dedurre il Teorema della Convergenza dominata (di Lebesgue) dal Teorema della Convergenza Monotona (di B. Levi).

TEMA 2. Sia μ misura su X, Σ_μ la σ-algebra dei misurabili.

Sia $f \geq 0$ sommabile. Provare che

(i) $\nu(E)$, $E \in \Sigma_\mu$ é una misura finita

(ii) $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ \delta_\epsilon > 0 :\ \mu(A) \ \leq\ \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \nu(E) \ \leq\ \epsilon$

TEMA 3. Sia $f \in L^1$. Provare che

$$|\frac{1}{\mu(E)} \int_E g| \leq c \quad \forall E \quad \text{misurabile e t.c.} \quad 0 < \mu(E) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \|g\|_\infty \leq c$$

Dedurre che, se μ é σ-finita, allora

$$(L^1)' \quad \text{é isometricamente isomorfo a} \quad L^\infty$$

TEMA 4. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$. Provare che

$$\sup_n \int |f_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sup_n \left(\|\varphi * f_n\|_\infty \ +\ \sum_{j=1}^{N} \|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f_n)\|_\infty \right) \ <\ +\infty$$

TEMA 5. Sia $c_N := N \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{\frac{N+2}{2}}}$. Provare che

$$u(x) \ =\ \frac{1}{c_N} \int\limits_{\mathbf{R}^N} \frac{< \nabla u(y)\,,\ x - y >}{|x-y|^N}\ dy \qquad \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

Esercizio 1. Sia $B := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Siano

$$I_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_B \qquad\qquad J_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p} \chi_{B^c}$$

Stabilire per quali p risulta

$$I_p < +\infty \qquad\qquad J_p < +\infty$$

Esercizio 2. Sia f_n successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^n)$, $\quad p \geq 1$. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Esercizio 3. Sia $f_n \in L^p, p > 1$. Sia $\sup_n \|f_n\|_{L^p} < +\infty$. Sia $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Provare che $$f_n \to 0 \ \ q.o. \ \Rightarrow \int f_n \, g \to 0 \ \ \forall g \in L^q$$

ISTRUZIONI.

1. Ogni Tema correttamente svolto dá 6 punti, per un massimo di 24 punti

2. Ogni esercizio correttamente svolto dá 6 punti.