AM5: Tracce delle lezioni- V Settimana

SPAZI L^p

Sia μ misura su X, $p \geq 1$.

$$L^p = L^p(X,\mu) := \{f : X \to [-\infty,+\infty] \mid f \text{ é misurabile e } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

Siccome $\quad p \geq 1 \Rightarrow (\frac{|t|+|s|}{2})^p \leq \frac{|s|^p+|t|^p}{2} \quad \forall\, s,t \in \mathbf{R}, \quad$ é

$$f,\, g \in L^p \quad \Rightarrow \quad f+g \in L^p$$

e quindi, facilmente, L^p é spazio vettoriale. Nel seguito, non distingueremo L^p da L^p quozientato rispetto al sottospazio $N := \{f = 0 \ q.o.\}$.

$\to$ Se $X = \mathbf{N}$ e μ é la misura che conta, $l^p := L^p(X,\mu)$ é lo spazio delle successioni $a := (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ di potenza p-esima sommabile con norma $\|a\| = [\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p]^{\frac{1}{p}}$

DISEGUAGLIANZE di HOLDER, di MINKOWSKII . Siano f, g misurabili, $p,\ q > 1$, tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (p,q si dicono esponenti coniugati). Allora

$$(\textbf{Holder}) \qquad \int |f\,g| \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} (\int |g|^q)^{\frac{1}{q}}$$

Sia $p \geq 1$. Allora

$$(\textbf{Minkowskii}) \qquad (\int |f+g|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |g|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Una elementare diseguaglianza di convessitá. Siano $p,\ q > 1$, tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora

$$s\,t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{s^q}{q} \quad \forall\ s,\ t \geq 0$$

Da $\quad \frac{d}{dr}(\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q}) = r^{p-1} - 1 \quad$ segue che $r = 1$ é punto di minimo assoluto. Da $\frac{r^p}{p} - r + \frac{1}{q} = 0$ in $r = 1$, segue $r \leq \frac{1}{p}r^p + \frac{1}{q} \ \ \forall r > 0$. Scrivendo (se $s \neq 0$) $r = \frac{t}{s^{q-1}}$ si ottiene la diseguaglianza voluta.

Adesso Holder segue subito scrivendo $t = \frac{|f(x)|}{(\int |f|^p)^{\frac{1}{p}}},\ s = \frac{|g(x)|}{(\int |g|^p)^{\frac{1}{p}}}$ e integrando.

Minkowskii segue da Holder: $\quad \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1, \ \ |f+g|^p \leq |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|$

$$\Rightarrow \quad \int |f+g|^p \leq (\int |f+g|^p)^{\frac{p-1}{p}} (\int |f|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |f+g|^p)^{\frac{p-1}{p}} (\int |g|^p)^{\frac{1}{p}}$$

COMPLETEZZA degli spazi L^p. Sia $p \geq 1$.

(i) $\|f\|_p := (\int_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$ é una norma su L^p.

(ii) L^p dotato di tale norma é uno **spazio di Banach**, ovvero

$$f_n \in L^p, \;\; \|f_n - f_m\|_p \to_{n,\, m \to \infty} 0 \;\; \Rightarrow \;\; \exists f \in L^p : \;\; \|f_n - f\|_p \to 0$$

Si prova esattamente come nel caso $p = 1$: sia $g_k := f_{n_k}$ tale che $\|g_{k+1} - g_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}$. Posto $F_n := \sum_1^n |g_{k+1} - g_k|$, é $\|F_n\|_p \leq \sum_1^n \frac{1}{2^k} \leq 1 \quad \forall n$ e quindi $F(x) := \lim_n F_n$ é in L^p per il Teorema di Levi, e quindi

$$\sum_1^\infty |g_{k+1} - g_k| < +\infty \quad \text{q.o.}$$

$$f(x) := \lim_k [g_1 + (g_2 - g_1) + \ldots + (g_k - g_{k-1})] = \lim_k f_{n_k} \quad \text{esiste finito q.o.}$$

Inoltre $|f_{n_k}| \leq F + |g_1|$ e quindi $|f_{n_k}|^p$ é equidominata e quindi $\int |f_{n_k} - f|^p \to 0$.

Infine, essendo f_n di Cauchy in L^p, $\int |f_n - f|^p \to 0$.

DISEGUAGLIANZA di INTERPOLAZIONE . Siano $1 \leq p \leq q$. Allora

$$f \in L^p \cap L^q \;\; \Rightarrow \;\; f \in L^r \;\; \forall r \in [p, q] \;\text{ e }\; \|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \, \|f\|_q^{1-\theta}$$

ove $\theta \in [0, 1]$ é tale che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Infatti, $\frac{p}{\theta r}$ e $\frac{q}{(1-\theta)r}$ sono esponenti coniugati e quindi

$$\int |f|^r = \int |f|^{r\theta} \, |f|^{r(1-\theta)} \leq (\int |f|^p)^{\frac{r\theta}{p}} \, (\int |f|^q)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}$$

DISEGUAGLIANZA di HOLDER GENERALIZZATA . Siano $f \in L^p, g \in L^q$. Allora

$$\frac{1}{r} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 \;\; \Rightarrow \;\; \|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Basta applicare Holder con esponenti $\frac{p}{r}$ e $\frac{q}{r}$:

$$\int |f|^r \, |g|^r \leq (\int |f|^p)^{\frac{r}{p}} \, (\int |g|^q)^{\frac{r}{q}}$$

L^2 e gli spazi di HILBERT

$\|f\|_2^2 = \int |f|^2 =< f, f >$ ove

$$< f, g > := \int fg\, d\mu, \quad f, g \in L^2$$

é un prodotto scalare (ovvero una forma bilineare simmetrica definita positiva) in L^2 . Notiamo che la diseguaglianza di Holder, con $p = q = 2$ dá la ben nota diseguaglianza di Cauchy-Schwartz .

Lo spazio L^2 é uno spazio di Hilbert:

SPAZI DI HILBERT . Sia $(H, \|.\|)$ spazio di Banach. Se esiste in H un prodotto scalare

$$< x, y >:= b(x, y), \qquad x, y \in H$$

$$< x, y > = < y, x > \qquad \forall x, y \in H, \qquad < x, x >> 0 \ \forall x \in H, \quad x \neq 0$$

tale che

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} \quad \forall x \in H$$

H si dice spazio di Hilbert.

Le seguenti (ben note) proprietá si verificano facilmente:

Cauchy-Schwartz : $\quad | < x, y > | \ \leq \ \|x\| \, \|y\| \quad \forall x, y \in H$

Pitagora : $\quad < x, y >= 0 \ \Rightarrow \ \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$

Regola del Parallelogramma : $\quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

La proprietá fondamentale degli spazi di Hilbert é l'esistenza della

PROIEZIONE ORTOGONALE : Sia V sottospazio lineare chiuso di H.

Allora $\quad \forall h \in H \quad \exists! \ v(h) \in V : \quad < h - v(h), v >= 0 \quad \forall v \in V$

Tale vettore si chiama proiezione ortogonale di h su V e si indica $P_V h$. L'applicazione P_V é una proiezione lineare ed é continua:

$$P_V(rh + sk) = rP_V(h) + sP_V(k) \quad \forall r, s \in \mathbf{R}, h, k \in H, \qquad P_V^2 = P_V$$

$$\|P_V(h)\| \leq \|h\| \quad \forall h \in H$$

Inoltre, indicato $\ V^\perp := \{h \in H : \ < h, v >= 0 \quad \forall v \in V\}$, risulta $\quad Ker P_V = V^\perp$.

Prova. Il vettore $v(h)$ é quello che realizza la minima distanza di h da V:

$$\text{se} \qquad d := \inf_{v\in V} \|h-v\|, \qquad \text{allora} \qquad \|h-v(h)\| = d$$

Mostriamo innanzi tutto che tale inf é realizzato: se $v_n \in V$ é minimizzante, cioé $\|h-v_n\| \to_n d$, allora, dalla regola del parallelogramma

$$\|v_n-v_m\|^2 = \|(v_n-h)+(h-v_m)\|^2 = 2(\|v_n-h\|^2+\|h-v_m\|^2) - \|2[\frac{v_n+v_m}{2}-h]\|^2$$

$$\leq 2(\|v_n-h\|^2+\|h-v_m\|^2) - 4d^2 \to_n 0$$

perché $\|\frac{v_n+v_m}{2}-h\| \geq d$ in quanto $\frac{v_n+v_m}{2} \in V$; dunque v_n é di Cauchy e quindi converge, necessariamente ad un elemento di V perché V é chiuso.

Poi, se $\overline{v}$ realizza il minimo, cioé $\|h-\overline{v}\| = d$, allora, fissato $v \in V$ e posto $\varphi_v(t) := \|h-\overline{v}+tv\|^2 = \|h-\overline{v}\|^2 + t^2\|v\|^2 + 2t < h-\overline{v}, v >$, risulta $\varphi_v(t) \geq \varphi_v(0) \quad \forall t \in \mathbf{R}$, cioé $t=0$ é di minimo per $\varphi_v(t)$ e quindi $0 = \varphi_v'(0) = 2 < h-\overline{v}, v > \quad \forall v \in V$.

Unicitá: se $v_1, v_2 \in V$ sono tali che $< h-v_1, v > = < h-v_2, v > \quad \forall v \in V$ allora $< v_2-v_1, v > = < h-v_1, v > - < h-v_2, v > = 0 \quad \forall v \in V$ e quindi, prendendo $v = v_2 - v_1$, troviamo che $v_1 = v_2$.

Linearitá: $< h-P_Vh, v > = < k-P_Vk, v > = 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow$ $< rh+sk-(rP_Vh+sP_Vk), v > = 0 \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad P_V(rh+sk) = rP_Vh+sP_Vk$ per l'unicitá. Poi, siccome $P_Vv = v \quad \forall v \in V$ e $P_Vh \in V \quad \forall h \in H$, P_V é idempotente. Inoltre, $P_Vh = 0 \Leftrightarrow < h, v > = 0 \quad \forall v \in V$.

Infine, per Pitagora:

$$\|h\|^2 = \|(h-P_Vh)+P_Vh\|^2 = \|h-P_Vh\|^2 + \|P_Vh\|^2 \geq \|P_Vh\|^2 \quad \forall h \in H$$

Corollario : $V = \overline{V} \quad \Rightarrow \quad H = V \oplus V^\perp$.

Infatti $V \cap V^\perp = \{0\}$ ed ogni $h \in H$ si scrive come $h = P_Vh + (h-P_Vh) \in V + V^\perp$.

ESEMPIO. Sia $V = < e_1, \ldots, e_n >$, $e_j \in H$, $< e_i, e_j > = \delta_{ij}$. Allora $P_Vh = \sum_{j=1}^n < h, e_j > e_j$.

Essendo tutte le norme su $\mathbf{R}^n$ tra loro equivalenti, V é completo e quindi é chiuso in H. Poi, $P_Vh := \sum_j h_je_j \Rightarrow 0 = < h-P_Vh, e_j > = < h, e_j > - < \sum_i h_ie_i\,, e_j > = < h, e_j > - h_j \Rightarrow P_Vh = \sum_{j=1}^n < h, e_j > e_j$.

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ .

Sia $l : H \to \mathbf{R}$ lineare e continuo. Allora

$$\exists \quad h \in H : \quad l(x) \; = < x, h > \quad \forall x \in H$$

Prova. Se $l(x) = 0 \quad \forall x \in H$, basta prendere $h = 0$. Altrimenti, l continuo $\Rightarrow$ $V := l^{-1}(0)$ é sottospazio lineare chiuso proprio di H, e quindi esiste $h \neq 0$ tale che $< h, v >= 0 \quad \forall v \in V$. Posiamo supporre $\|h\| = 1$. Siccome $l(x - \frac{l(x)}{l(h)}h) = 0 \quad \forall x \in H$, abbiamo che $< h, x - \frac{l(x)}{l(h)}h >= 0 \quad \forall x \in H$ ovvero $l(x) =< x, l(h)h >$.

NOTA. Lo spazio lineare $H' := \{l : H \to \mathbf{R} : \quad l$ é lineare e continuo$\}$ dotato della norma degli operatori

$$\|l\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|}$$

é uno spazio di Banach. Tale spazio é detto **duale algebrico topologico** di H.

Dato $h \in H$, il funzionale $l_h : H \to \mathbf{R}$ definito come $l_h(x) :=< x, h >$, é chiaramente lineare e, per Cauchy-Schwartz, continuo e quindi é un elemento di H'. Inoltre, l'applicazione

$$T : h \to l_h$$

di H in H' é chiaramente lineare e, di piú, $\|T(h)\| = \|l_h\| = \|h\|$. Il Teorema di Riesz dice che T é suriettiva. In altre parole

Corollario (RIESZ) .

Ogni spazio di Hilbert é isometricamente isomorfo al suo duale.

Diseguaglianza di BESSEL .

$$e_j \in H, \; < e_i, e_j >= \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad \sum_j | < h, e_j > |^2 \; \leq \|h\|^2 \quad \forall h \in H$$

Prova. Posto $V_n =< e_1, \ldots, e_n >$, $P_n := P_{V_n}$, é

$$\sum_{j=1}^{n} | < h, e_j > |^2 \; = \; \|P_n h\|^2 \; \leq \; \|h\|^2 \quad \forall h \in H, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

BASE HILBERTIANA (o base ortonormale) .

• Un sistema di vettori e_j é **sistema ortonormale** se $\quad < e_i, e_j >= \delta_{ij}$

•• Un sistema di vettori e_j é **completo** se $\quad < x, e_j >= 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow \quad x = 0$

NOTA. (i) Se la varietá lineare H_0 generata dagli e_j é densa, allora il sistema é completo. Ad esempio,

$e_j := e^{ijt}, \quad t \in [0, 2\pi]$ formano un sistema ortonormale in $L^2([0, 2\pi])$. Ció segue dal teorema di Weierstrass (ogni funzione continua in $[0, 2\pi]$ é limite uniforme di polinomi trigonometrici) e del fatto che, come vedremo, le funzioni continue sono dense in ogni L^p.

(ii) **Ogni Hilbert separabile ha un sistema ortonormale (numerabile) completo**: da ogni insieme numerabile denso si puó costruire, usando un procedimento di ortonormalizzazione alla Gram-Schmidt, un sistema (numerabile) ortonormale che genera una varietá lineare densa (e quindi é completo).

• • • Un sistema ortonormale di vettori e_j é **base hilbertiana** se

$$x = \sum_j < x, e_j > e_j := \lim_n \sum_{j=1}^n < x, e_j > e_j \quad \forall x \in H$$

I numeri $< x, e_j >$ si chiamano **coefficenti di Fourier** di x nella base e_j.

Proposizione 1. Un sistema ortonormale completo e_j é base hilbertiana e

(**IDENTITÁ DI PARSEVAL**) $$\|x\|^2 = \sum_j | < x, e_j > |^2 \quad \forall x \in H$$

Sia $x_n := \sum_{j=1}^n < x, e_j > e_j$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue che $\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \sum_{n+1}^{n+p} | < x, e_j > |^2 \to_n 0$ per ogni p, ovvero x_n é di Cauchy e quindi converge, diciamo a $\overline{x}$. Proviamo che $\overline{x} = x$. Infatti, $< \overline{x}, e_k >= \lim_n < x_n, e_k >=< x, e_k >$. Dunque $< x - \overline{x}, e_k >= 0 \quad \forall k$ e quindi $x = \overline{x}$. Infine, $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \to_n \|x\|$ e quindi $\sum_{j=1}^n | < x, e_j > |^2 = \|x_n\|^2 \to \|x\|^2$.

Proposizione 2. Ogni Hilbert separabile ha una base hilbertiana.

NOTA. Sia e_j base ortonormale. La mappa F che associa ad $x \in H$ i suoi coefficenti di Fourier, $(Fx)_j :=< x, e_j >$ porta (in modo chiaramente lineare)H in l^2: $F : H \to l^2$ (da Bessel). Da Parseval segue che F é isometria . Siccome, come sopra, ogni successione di quadrato sommabile $(a_j)_{j \in \mathbf{N}}$, $\sum_j |a_j|^2 < +\infty$ individua il vettore

$x := \sum_j a_j e_j$ i cui coefficenti di Fourier sono proprio gli a_j, concludiamo che F é isometria suriettiva.

Teorema di isomorfismo. H, Hilbert separabile, é isometricamente isomorfo a l^2.

NOTA. Piú in generale, ogni Hilbert é isometricamente isomorfo a un $L^2(X, \mu)$, ove X é l'insieme degli indici di una base hilbertiana per H (eventualmente non numerabile) e μ é la misura che conta.

CONVERGENZA DEBOLE

Ricordiamo che $x_n \to_n x$ (x_n converge in norma ad x) se $\|x_n - x\| \to_n 0$.

Una successione $x_n \in H$ é limitata se $\sup_n \|x_n\| < +\infty$. Diversamente da quanto accade in $\mathbf{R}^n$, successioni limitate non hanno in generale sottosuccessioni convergenti. Ad esempio, se $e_j, j \in \mathbf{N}$ é sistema ortonormale, allora $\|e_i - e_j\|^2 = 2\delta_{ij}$ e quindi e_j non ha alcuna sottosuccessione convergente.

Definizione $('\rightharpoonup' \quad = \quad$ ' converge debolmente').

$$x_n \rightharpoonup_n 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad < x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in H$$

Si dice che $x_n \rightharpoonup_n x$ se $(x_n - x) \rightharpoonup_n 0$. Dalla diseguaglianza di Bessel segue ad esempio che $e_j \rightharpoonup_j 0$.

Proposizione 1

(i) $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n x$ (ma non viceversa)

(ii) $x_n \rightharpoonup_n x,\ y_n \rightharpoonup_n y, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha x_n + \beta y_n \rightharpoonup_n \alpha x + \beta y$

(iii) $x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \liminf \|x_n\| \geq \|x\|$

Prova. (i) $| < x_n - x, h > | \leq \|h\| \ \|x_n - x\| \to_n 0$. (ii) ovvia (iii) Possiamo supporre $x \neq 0$. Allora

$$| < x_n, \frac{x}{\|x\|} > | \leq \|x_n\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| \leq \liminf \|x_n\|$$

NOTA. (iii) dice: la norma é 'inferiormente semicontinua rispetto alla convergenza debole'.

Teorema (uniforme limitatezza). $\quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|x_n\| < +\infty$

Lemma di Mazur. $\quad x_n \in C \quad$ chiuso e convesso, $\quad x_n \rightharpoonup_n x \quad \Rightarrow \quad x \in C.$

Prova. Postposta.

Proposizione 2

(i) $x_n \rightharpoonup_n x, \;\; y_n \to y \quad \Rightarrow \quad < x_n, y_n > \to_n < x, y >$

(ii) $\overline{< e_i >} = H, \;\; < x_n, e_j > \to_n 0 \quad \forall j, \; \sup_n \|x_n\| < +\infty \quad \Rightarrow \quad x_n \rightharpoonup_n 0$

Prova. (i) $\;| < x_n, y_n > - < x\,,\, y > | \; = \; | < x_n - x, y > \; + \; < x_n\,,\, y_n - y > | \; \leq$

$\leq \; | < x_n - x, y > | \; + \; \|y_n - y\| \, \|x_n\| \; \to_n 0 \qquad$ perché $\quad x_n \quad$ é limitata

(ii) $\; < x_n, h > \to_n 0 \quad \forall h \in < e_j >. \quad$ Se $\quad h_k \in < e_j >, \quad h_k \to_k h, \quad$ allora $| < x_n, h > | \leq | < x_n, h_k > | + | < x_n, h - h_k > | \quad \Rightarrow \quad \limsup_n | < x_n, h > | \leq \sup_n \|x_n\| \, \|h_k - h| \quad \forall k \in \mathbf{N}$ e quindi $\quad \limsup_n | < x_n, h > | = 0.$

Compattezza debole $\qquad$ Sia H Hilbert separabile.

Se x_n é limitata, allora x_n ha una sottosuccessione debolmente convergente.

Prova. $\quad$ Sia e_j base ortonormale. Siccome x_n é limitata, basta provare che

$$\exists \quad x_{n_k}, \quad x : \quad < x_{n_k}, e_j > \to_k < x, e_j > \quad \forall j$$

Siccome $| < x_n, e_1 > | \leq \sup_n \|x_n\|$, esiste una successione di indici n_j e un numero c_1 tale che $c_1 = \lim_j < x_{n_j}, e_1 >$. Passando ad una nuova sottosuccessione, troviamo che $\exists c_i := \lim_k < x_{n_{j_k}}, e_i >, \quad i = 1, 2.$ Iterando ed applicando il metodo diagonale di Cantor troviamo che lungo una sottosuccessione (diagonale)

$$\exists c_i := \lim_k < x_{n_k}, e_i > \quad \forall i \in \mathbf{N}$$

Da $\sum_{i=1}^N c_i^2 = \lim_k \sum_{i=1}^N | < x_{n_{j_k}}, e_i > |^2 \leq \sup_n \|x_n\|^2 \quad \forall N$ e quindi $\sum_{i=1}^\infty c_i^2 < +\infty$. Allora resta definito il vettore in H dato da $x := \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$. Siccome $< x, e_j >= c_j = \lim_k < x_{n_k}, e_j >$, dalla Proposizione 2-(ii) segue che $\quad x_{n_k} \rightharpoonup_k x.$

NOTA. $\quad$ L'ipotesi di separabilitá si puó facilmente eliminare, argomentando nella chiusura della varitá lineare generata dagli x_n (che é appunto separabile).

AM5: Esercizi e problemi- V Settimana

Esercizio 1 . Sia $\mu(X) < \infty$. Siano $f_n \geq 0$ funzioni sommabili. Provare che

$$f_n \to f \quad q.o., \quad \int_X f_n \, d\mu \;\to\; \int_X f \, d\mu \;\Rightarrow\; \|f_n - f\|_{L^1} \to 0$$

Suggerimento . Usando l'ipotesi, Egoroff e la assoluta continuitá dell'integrale, mostrare che si puó scrivere $\int_{X\setminus A} f_n = \int_{X\setminus A} f + \circ(1) \leq \circ(1) + \epsilon$ *per un insieme* A *tale che* f_n *converge uniformemente ad* f *su* A, *e* $\mu(X\setminus A) \leq \delta_\epsilon$ *per un* δ_ϵ *tale che....*

Esercizio 2. Siano $p_i > 1$, $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_l} = \frac{1}{p} \leq 1$. Siano $f_1, \ldots, f_l$ misurabili. Provare che

$$(\int |f_1 \ldots f_l|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f_1|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} \ldots (\int |f_l|^{p_l})^{\frac{1}{p_l}}$$

Esercizio 3 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che

(i)f_t è misurabile, $\quad f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}}||f||_p$

Esercizio 4. Siano $f_n \in L^p(X)$ tali che $\sup_n \int_X |f_n|^p < +\infty$. Provare che

$\liminf |f_n| \in L^p$, mentre può accadere che $\int \limsup |f_n| = +\infty$.

Esercizio 5. Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $1 \leq s < t$. Provare che

(i) $f \in L^t \Rightarrow f \in L^s$, e l'inclusione $L^t \subset L^s$ è stretta

(ii) l'inclusione $L^t \subset L^s$ è falsa se $\mu(X) = +\infty$.

Esercizio 6. Sia $\mu(X) < +\infty$, e sia f misurabile, tale che $\exists c > 0 : |f(x)| \leq c$ per quasi tutti gli x. Posto $||f||_\infty := \inf\{c \geq 0 : |f(x)| \leq c$ per quasi ogni $x\}$, provare che

$$||f||_p \to_{p\to+\infty} ||f||_\infty$$

Esercizio 7. Sia $f_n \in L^p(\mathbf{R}^n)$. Provare che

$$f_n \to f q.o., \quad \int |f_n|^p \to \int |f|^p \Rightarrow \|f_n - f\|_p \to 0$$