AM5: - X Settimana

COMPATTEZZA IN $L^p(\mathbf{R}^N)$: IL TEOREMA DI FRECHET- KOLMOGOROV

Sia $p \geq 1$. Non é in generale vero che una successione limitata in $L^p(\mathbf{R}^N)$ ammette sottosuccessioni convergenti in L^p. Cioé, non é vero in generale che

$$f_n \in L^p(\mathbf{R}^N), \quad \sup_n \|f_n\|_{L^p} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f_{n_k} \quad \text{convergente in} \quad L^p$$

Ad esempio, se $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ e $f_n(x) := f_n(x+h_n)$, $|h_n| \to_n +\infty$, allora $f_n(x) \to_n 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$ ma f_n non ha estratte convergenti (necessariamente a zero) in L^p perché $\|f_n\|_p \equiv \|f\|_p$. Analogamente , $f_n(x) := \epsilon_n^{\frac{N}{p}} f(\epsilon_n x)$, $\epsilon_n \to_n 0$ ha norma L^p costante e quindi non ha estratte convergenti a $f \equiv 0$ che é il limite puntuale delle f_n.

Al fine di individuare delle condizioni che assicurino la compattezza di f_n in L^p, cominciamo con l'osservare che

$$\int |f_n - f|^p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \sup_n \int |f_n|^p < +\infty \quad \text{e}$$

$$(i) \quad \sup_n \int |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h|\to 0} 0 \qquad (ii) \quad \sup_n \int_{|x|\geq r} |f_n|^p \to_{r\to+\infty} 0$$

La validitá di tali proprietá per ciascuna f_n é ben nota: il fatto che tali proprietá valgano uniformemente in n é facile conseguenza della convergenza L^p delle f_n. É l'insieme di tali condizioni che assicura che una data f_n ha una estratta convergente in L^p.

Teorema (Frechet-Kolmogorov) . Sia f_n limitata in $L^p(\mathbf{R}^N)$ e tale che

$$(i) \quad \sup_n \int_{B_R} |f_n(x+h) - f_n(x)|^p dx \to_{|h|\to 0} 0 \quad \forall R > 0$$

Allora esiste $f \in L^p(\mathbf{R}^N)$ ed f_{n_k} tale che $\int_{B_R} |f_{n_k} - f|^p \to_k 0 \quad \forall R > 0$. Se di piú

$$(ii) \quad \sup_n \int_{|x|\geq r} |f_n|^p \to_{r\to+\infty} 0$$

allora f_n ha una sottosuccessione convergente in $L^p(\mathbf{R}^N)$.

Prova. Per semplicitá, prendiamo $p = 1$ e scriviamo $\|f\| := \|f\|_{L^1}$. Vogliamo provare che, nell'ipotesi (i), fissata $R_k \to_k +\infty$,

$$\exists n_k : \quad \int_{B_{R_k}} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \ \le\ \frac{3}{2^k}$$

Tale affermazione si puó far derivare dalle seguenti:

Affermazione 1. Fissata $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, si ha

$$\sup_n \int |f_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sup_n \left(\|\varphi * f_n\|_\infty + \sum_{j=1}^N \|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f_n)\|_\infty \right) < +\infty$$

Affermazione 2. Sia $\varphi \in C_0^\infty(B_1)$, $0 \le \varphi \le 1$, $\int \varphi = 1$, $\varphi_\epsilon = \epsilon^{-N}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. Allora

$$\sup_n \int_{B_R} |f_n(x+h) - f_n(x)| \to_{|h|\to 0} 0 \quad \forall R > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sup_n \int_{B_R} |f_n - (\varphi_\epsilon * f_n)| \to_{\epsilon \to 0} 0 \quad \forall R > 0$$

Affermazione 3. Sia ϵ_k decrescente a zero, R_k crescente a $+\infty$. Allora

$$\exists n_k : \quad \sup_{x \in B_{R_k}} |\varphi_{\epsilon_k} * (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})|(x) \le \frac{1}{2^k\, vol B_{R_k}}$$

CONCLUSIONE. Sia $R_k \to +\infty$. Nell'ipotesi (i), Affermazione 2 dá

$$(\bullet) \quad \forall k, \quad \exists \epsilon_k : \quad \sup_n \int_{B_{R_k}} |f_n - (\varphi_{\epsilon_k} * f_n)| \le \frac{1}{2^k}$$

Per tale ϵ_k, che si puó assumere decrescente a zero, usando Affermazione 3, otteniamo quindi

$$\exists n_k : \quad \int\limits_{B_{R_k}} |\varphi_{\epsilon_k} * (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})|(x) \le \frac{1}{2^k}$$

e quindi, fissato $R > 0$ si ha , per $R_k \ge R$, usando $(\bullet)$,

$$\int_{B_R} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \le \int_{B_{R_k}} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \le$$

$$\int_{B_{R_k}} |f_{n_{k+1}} - (\varphi_{\epsilon_k} * f_{n_{k+1}})| + \int_{B_{R_k}} |(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) * \varphi_{\epsilon_k}| + \int_{B_{R_k}} |(\varphi_{\epsilon_k} * f_{n_k}) - f_{n_k}| \le \frac{3}{2^k}$$

e quindi $f_{n_k}\chi_{B_R}$ é di Cauchy in $L^1(B_R)$ e quindi esiste $f_R \in L^1(B_R)$ tale che $\int |f_{n_k} - f_R| \to_k 0$. Notiamo che $R_1 < R_2 \Rightarrow f_{R_1} \equiv f_{R_2}$ quasi ovunque in B_{R_1} . Inoltre $\int_{B_R} |f_R| \leq \liminf_k \int_{B_R} |f_{n_k}| \leq \sup_n \|f_n\|$. Resta quindi definita

$$f \in L^1 \quad : \quad \int_{B_R} |f_{n_k} - f| \to_k 0 \quad \forall R > 0$$

Prova Affermazione 1. Segue subito da $\sup_n \|f_n\| < +\infty$ e da

$$\|\varphi * f_n\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \|f_n\|, \qquad \|\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f_n)\|_\infty \leq \|\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi\|_\infty \|f_n)\|$$

Prova Affermazione 2. $\int_{B_R} |f_n - (\varphi_\epsilon * f_n)| \leq$

$$\int_{B_R}\left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x)|\varphi_\epsilon(x)\, dy\right) dx = \int_{B_R}\left(\int_{\mathbf{R}^N} |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)|\varphi(z)\, dz\right) dx$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N}\left(\varphi(z) \int_{B_R} |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)|\, dx\right) dz$$

Ora, da (i)-(ii) segue che

$$B(\epsilon, z) := \varphi(z) \sup_n \int_{B_R} |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)| dx \to_\epsilon 0 \quad \forall z \quad \text{e} \quad |B(\epsilon, z)| \leq 2\varphi(z)\|f_n\|$$

(equidominatezza di $B(\epsilon, .)$) e quindi

$$\sup_n \int_{B_R} |f_n - (\varphi_\epsilon * f_n)| \leq \int_{\mathbf{R}^N}\left(\varphi(z) \sup_n \int_{B_R} |f_n(x-\epsilon z) - f_n(x)|\, dx\right) dz \to_\epsilon 0$$

Prova Affermazione 3. Affermazione 1 assicura che, per ogni ϵ, la successione $n \to \varphi_\epsilon * f_n$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzela.

Indichiamo $\varphi_k := \varphi_{\epsilon_k}$, $B_k := B_{R_k}$. Il Teorema di Ascoli-Arzela assicura che esiste una prima selezione di indici n_j^1 tale che $\varphi_1 * f_{n_j^1}$ converge uniformemente in B_1 ed é quindi ivi Cauchy uniforme, e si potrá supporre che:

$$\sup_{B_1} |\varphi_1 * (f_{n_i^1} - f_{n_j^1})| \leq \frac{1}{2\, vol(B_1)} \quad \forall\, i, j$$

Per la stessa ragione, si puó effettuare una selezione degli indici n_j^1, diciamo n_j^2 tale che

$$\sup_{B_2} |\varphi_2 * (f_{n_i^2} - f_{n_j^2})| \leq \frac{1}{2^2\, vol(B_2)} \quad \forall\, i, j$$

Siccome $j \to n_j^2$ é una sottosuccessione di $j \to n_j^1$, é anche vero che

$$\sup_{B_1} |\varphi_1 * (f_{n_2^2} - f_{n_1^1})| \leq \frac{1}{2\, vol(B_1)}$$

Iterando, si trovano per ogni $k \geq 1$ successioni di indici $j \to n_j^k$ e $j \to n_j^{k+1}$ sottosuccessione di $j \to n_j^k$ tali che

$$(h) \qquad \sup_{B_h} |\varphi_h * (f_{n_i^h} - f_{n_j^h})| \leq \frac{1}{2^h\, vol(B_h)} \quad \forall\, i, j \in \mathbf{N}, \quad h = k, k+1$$

Siccome, in (h) l'indice n_{k+1}^{k+1} é ammesso, in quanto indice selezionato tra gli n_i^k otteniamo in particolare

$$\sup_{B_k} |\varphi_k * (f_{n_{k+1}^{k+1}} - f_{n_k^k})| \leq \frac{1}{2^k\, vol(B_k)}$$

Basta allora prendere la successione diagonale di indici $n_k := n_k^k$.

Per provare infine la seconda parte del teorema basta osservare che

$$\exists R_\epsilon : \quad \int\limits_{|x|\geq R_\epsilon} |f| \leq \liminf_n \int\limits_{|x|\geq R_\epsilon} |f_{n_k}| \leq \epsilon \quad \Rightarrow$$

$$\limsup_n \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f_{n_k} - f| \leq \limsup_n \int\limits_{|x|\leq R_\epsilon} |f_{n_k} - f| + \limsup_n \int\limits_{|x|\geq R_\epsilon} |f_{n_k} - f| \leq \epsilon$$

IL LEMMA DI RICOPRIMENTO DI VITALI E APPLICAZIONI

Ricoprimento di Vitali. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Una famiglia $\mathcal{V}$ di palle chiuse tali che $\sup\{r(B) : B \in \mathcal{V}\} < +\infty$ ($r(B) :=$ raggio di B) si dice ricoprimento di Vitali di A se

$$\forall x \in A, \quad \exists B_r(x) \in \mathcal{V} \quad \text{e} \quad \inf\{r > 0 : B_r(x) \in \mathcal{V}\} = 0$$

ESEMPIO. Sia A aperto. Fisato $r > 0$, l'insieme delle palle chiuse contenute in A e di raggio minore di r é ricoprimento di Vitali di A.

Lemma di Vitali. Sia $A \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$, Ω aperto. Sia $\mathcal{V}$ ricoprimento di Vitali di A. Allora $\exists B_j \in \mathcal{V}$ $j \in \mathbf{N}$ tali che

$$B_j \subset \Omega \quad \forall j, \qquad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad \text{e} \quad L^N(A \setminus \cup_j B_j) = 0$$

ESEMPIO. Sia Ω aperto, $\delta > 0$. Allora esiste una famiglia numerabile di palle chiuse $B_j \subset \Omega$ disgiunte di raggio minore di δ e tali che $L^N(\Omega \setminus \cup_j B_j) = 0$

Prova. Nel seguito indicheremo con B (con vari indici) un generico elemento di $\mathcal{V}$ e con $r = r(B)$ il suo raggio. Scriviamo $\Omega_1 := \Omega$.

Posto $\quad \delta_1 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_1\}$, $\quad$ sia $\quad B_1 \subset \Omega_1 \ : \quad r(B_1) \geq \dfrac{\delta_1}{2}$

Se $A \subset B_1$, allora $\{B_1\}$ dá subito il ricoprimento cercato .

Se no, $\exists\, x \in A \setminus B_1$ e quindi $\exists\, B_r(x) \in \mathcal{V}$: $B_r(x) \subset \Omega_2 := \Omega_1 \setminus B_1$.

Posto $\quad \delta_2 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_2\} \leq \delta_1$ $\quad$ sia $\quad B_2 \subset \Omega_2 \ : \quad r(B_2) \geq \dfrac{\delta_2}{2}$

Se $A \subset B_1 \cup B_2$, allora il ricoprimento cercato é $\{B_1, B_2\}$ $(B_1 \cap B_2 = \emptyset!)$.

Se no, si itera il procedimento: se dopo n iterazioni si trovano $B_1, \ldots, B_n$ disgiunti e tali che $A \subset \cup_{j=1}^n B_j$, il ricoprimento cercato é $\{B_1, \ldots, B_n\}$,

se no, $\forall n \ \exists \ B_n \in \mathcal{V} \ : \quad B_{n+1} \subset \Omega_{n+1} \ := \ \Omega_n \setminus B_n = \Omega_1 \setminus \left(\cup_{j=1}^n B_j\right)$,

$$\delta_{n+1} := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_{n+1}\} \leq \delta_n \qquad \text{e} \qquad r(B_{n+1}) \geq \frac{\delta_{n+1}}{2}$$

Indicata con $\tilde{B}_n$ la palla concentrica a B_n e di raggio $r(\tilde{B}_n) = 5r_n$, proviamo che

$$(*) \qquad A \setminus (\cup_n B_n) \subset \cup_{k \geq n} \tilde{B}_k \quad \forall n$$

Notiamo che, se $r_n := r(B_n)$, B_n disgiunte $\Rightarrow$ $c_N \sum_n r_n^N \ = \ L^N(\cup_n B_n) \ \leq$ $L^N(\Omega_1) < +\infty \quad \Rightarrow \quad L^N \left(\cup_{k \geq n} \tilde{B}_k\right) \leq c_N 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$ Quindi $(*)$ implica la tesi: $L^N \left(A \setminus (\cup_n B_n)\right) \ = \ 0$. Resta da provare $(*)$, ovvero

$$\forall x \in A \setminus (\cup_j B_j)\,, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad \exists k \geq n : \quad x \in \tilde{B}_k$$

Fissato n, $x \in A \setminus (\cup_j B_j) \subset \Omega_n \quad \Rightarrow \quad \exists B_r(x) \in \mathcal{V}$ tale che $B_r(x) \subset \Omega_n$.

Inoltre $\delta_j < r_x := r(B_r(x)) \quad \Rightarrow \quad B_r(x)$ non é contenuto in $\Omega_j \quad \Rightarrow$ $k := min\{j : \ B_r(x)$ non é contenuto in $\Omega_j\}$ é ben definito (e $\geq n+1$). Allora

$B_r(x) \subset \Omega_{k-1} \quad \Rightarrow \quad r_x \leq \delta_{k-1} \leq 2r_{k-1}$

$B_r(x) \subset \Omega_{k-1}$ e $B_r(x)$ non é contenuto in $\Omega_k \quad \Rightarrow \quad B_r(x) \cap B_{k-1} \neq \emptyset$

(infatti $B_r(x) \subset \Omega_{k-1}$, $B_r(x) \cap B_{k-1} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad B_r(x) \subset \Omega_{k-1} \setminus B_{k-1} = \Omega_k$), cioé

$B_r(x)$ interseca B_{k-1} ed ha diametro minore di quattro volte $r(B_{k-1})$; dunque $B_r(x)$ é contenuto in $\tilde{B}_{k-1}$, palla concentrica a B_{k-1} ed avente raggio pari a $5r_{k-1}$.

Lemma 1. Sia $0 \le f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Posto

$$f^\sharp(x) \;=\; \limsup_{r\to 0} \frac{1}{vol B_r(x)} \int_{B_r(x)} f(y)\,dy$$

si ha

$$\int_{\{f^\sharp \ge c\}} f(y)\,dy \;\ge\; c\,L^N(\{f^\sharp \ge c\}) \quad \forall c \ge 0$$

NOTA. Se f é anche continua, dal teorema della media segue che $f^\sharp = f$ ed il lemma si riduce alla diseguaglianza di Chebicheff.

Prova. Scriviamo, per $c > 0$, $A_c := \{x:\ f^\sharp(x) \ge c\}$. Fissato $0 < \epsilon < c$,

$$x \in A_c \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0: \quad \frac{1}{vol B_{r_j}(x)} \int_{B_{r_j}(x)} f(y)\,dy \;\ge\; c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x): \quad x \in A_c, \quad \frac{1}{vol B_r(x)} \int_{B_r(x)} f(y) \ge c - \epsilon\}$

é un ricoprimento di Vitali di A_c (notiamo che $B_r(x) \in \mathcal{V} \Rightarrow (c-\epsilon) c_n r^N \le \int f$).

Fissato Ω aperto contenente A_c, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V}$ palle chiuse disgiunte e tali che $L^N(A_c \setminus \cup_j B_j) = 0$ e quindi

$$L^N(A_c) \le L^N((A_c \setminus \cup_j B_j) \cup_j B_j) \le \sum_j vol(B_j) \le \frac{1}{c-\epsilon} \sum_j \int_{B_j} f \le \frac{1}{c-\epsilon} \int_\Omega f$$

e quindi

$$L^N(A_c)\,(c-\epsilon) \;\le\; \inf\{\int_\Omega f : \Omega \quad \text{aperto}, \quad A_c \subset \Omega\} \;=\; \int_{A_c} f \quad \forall \epsilon > 0$$

Lemma 2. Sia ν misura di Radon, cioé ν é finita sui compatti e

$\nu(A) = \inf\{\nu(\Omega) : A \subset \Omega,\ \Omega \text{ aperto}\}$

$\nu(E) = \sup\{\nu(K) : K \subset A,\ K \text{ compatto}\} \qquad \forall E \quad$ boreliano

Allora, $\quad A \subset A_c \;=\; \{x:\ \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \ge c\} \;\Rightarrow\; \nu(A) \ge c\,L^N(A)$

Prova. Fissato $0 < \epsilon < c$,

$$x \in A_c \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{\nu(B_{r_j}(x))}{vol(B_{r_j}(x))} \geq c - \epsilon$$

Dunque, $\qquad \mathcal{V} := \{B_r(x) : \quad x \in A, \quad \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \geq c - \epsilon\}$

é un ricoprimento di Vitali di A (notiamo che $B_r(x) \in \mathcal{V} \Rightarrow (c-\epsilon)c_n r^N \leq \nu(\mathbf{R}^N)$).

Fissato Ω aperto contenente A, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V}$ palle chiuse disgiunte e tali che $L^N(A \setminus \cup_j B_j) = 0$ e quindi

$$L^N(A) \leq L^N((A \setminus \cup_j B_j) \cup_j B_j) \leq \sum_j vol(B_j) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c-\epsilon} \sum_j \nu(B_j) \leq \frac{1}{c-\epsilon} \nu(\Omega)$$

e quindi

$$L^N(A)\,(c-\epsilon) \leq \inf\{\nu(\Omega) : \Omega \quad \text{aperto}, \quad A \subset \Omega\} = \nu(A) \quad \forall \epsilon > 0$$

Corollario. Sia ν misura di Radon singolare rispetto a L^N. Allora

$$\frac{\nu(B_r(x))}{L^N(B_r(x))} \to_{r\to 0} 0 \quad q.o.x$$

Infatti, sia $L^N(Z) = 0 = \nu(Z^c)$. Allora, per ogni $c > 0$, si ha

$$L^N(\{x : \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol B_r(x)} \geq c\} =$$

$$= L^N(\{x \in Z^c : \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol B_r(x)} \geq c\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c}\nu(\{x \in Z^c : \limsup_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol B_r(x)} \geq c\}) = 0$$