Esercitazione 1- Am3

Prof. Ugo Bessi, Dott. Claudia Di Giulio

28 febbraio 2005

Esercizio 1

La soluzione di un'equazione differenziale lineare $u'+a(t)u = b(t)$ é $u(t) = e^{-A(t)} \int b(t)e^{A(t)}dt$ con $A(t) = \int a(t)dt$

1. In questo caso $a(t) = \sin t$ e $b(t) = (1 + \cos t) \sin t$. Allora $A(t) = \int \sin t dt = -\cos t$. La soluzione $u(t) = 2 + \cos t + c$ si ottiene risolvendo l'integrale:
$$u(t) = e^{\cos t} \int (1 + \cos t) \sin t e^{-\cos t} dt$$
2. In questo caso $A(t) = \int a(t)dt = \int \frac{2}{t} dt = 2 \ln |t|$. La soluzione $u(t) = e^t - \frac{2e^t}{t} + \frac{2e^t}{t^2} + \frac{t}{3} + c$ si ottiene risolvendo:
$$e^{-A(t)} \int e^A(t)b(t)dt$$
ossia
$$e^{-2\ln|t|} \int e^{2\ln t}(e^t + 1)dt = \frac{1}{t^2} \int t^2(e^t + 1)dt$$
3. Inizialmente si calcola $A(t) = \int -\frac{1}{1+e^x} dx = -x+\ln(1+e^x)+c$. La soluzione dell'equazione é $u(x) = \frac{1}{1+e^x}(-\frac{e^{-x}}{2} - 1 + ce^x)$ e si ottiene risolvendo $u(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}b(x)dx = e^{x-\ln(1+e^x)} \int e^{-x}e^{-x+\ln(1+e^x)}dx + c = \frac{e^x}{1+e^x} \int e^{-2x}(1 + e^x)dx$

Esercizio 2

Per dimostrare che F é una contrazione consideriamo

$$d(F(f), F(g)) = d(\varphi, \psi) =$$

$$= sup_{x\in[0;1]} |\varphi(x) - \psi(x)| = sup_{x\in[0;1]} \left|1 + \int_0^1 e^{-xy}yf(y)dy - 1 - \int_0^1 e^{-xy}yg(y)dy\right| =$$

$$= sup_{x\in[0;1]} \left|\int_0^1 e^{-xy}yf(y)dy - \int_0^1 e^{-xy}yg(y)dy\right| =$$

$$= sup_{x\in[0;1]} \left|\int_0^1 e^{-xy}y(f(y) - g(y))dy\right| \leq$$

$$\leq sup_{x\in[0;1]} \int_0^1 e^{-xy}y |f(y) - g(y)| dy \leq$$

$$\leq d(f;g)(sup_{x\in[0;1]}\int_0^1 e^{-xy}ydy) \leq$$

$$\leq d(f;g)\int_0^1 ydy = \frac{1}{2}d(f;g)$$

Esercizio 3
Osserviamo che:

$$|(F_\lambda(u))(x)-(F_\lambda(v))(x)| = \left|e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda t}u(t)dt - e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda t}v(t)dt\right| =$$

$$= e^{-\lambda x}\left|\int_0^x e^{\lambda t}u(t)dt - \int_0^x e^{\lambda t}v(t)dt\right| =$$

$$= e^{-\lambda x}\left|\int_0^x e^{\lambda t}(u(t)-v(t))dt\right| \leq$$

$$\leq e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda t}\left|u(t)-v(t)\right|dt \leq$$

$$\leq e^{-\lambda x}sup_{x\in[0;1]}\left|u(x)-v(x)\right|\int_0^x e^{\lambda t}dt =$$

$$= d(u;v)e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda t}dt = g_\lambda(x)d(u;v)$$

dove $g_\lambda(x) = e^{-\lambda x}\int_0^x e^{\lambda t}dt$.
Poiché $d(F_\lambda(u), F_\lambda(v)) = sup_{x\in[0;1]}\left|(F_\lambda(u))(x)-(F_\lambda(v))(x)\right|$
allora $d(F_\lambda(u), F_\lambda(v)) \leq (sup_{x\in[0;1]}g_\lambda(x))d(u;v) = k_\lambda d(u;v)$
dove con k_λ abbiamo indicato $sup_{x\in[0;1]}g_\lambda(x)$.
F é una contrazione per tutti i λ per cui $k_\lambda = sup_{x\in[0;1]}g_\lambda(x) < 1$, con $g_\lambda(x) = x$ per $\lambda = 0$, $g_\lambda(x) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda}$ per $\lambda \neq 0$.
Osserviamo che per $\lambda = 0$ F_λ non é una contrazione perché $sup_{x\in[0;1]}x = 1$
Per $\lambda \neq 0$ considero $g_\lambda(x) = \frac{1-e^{-\lambda x}}{\lambda}$ ed osservo dallo studio della derivata prima $g'_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$ che é una funzione crescente, quindi $k_\lambda = sup_{x\in[0;1]}g_\lambda(x) = g_\lambda(1) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. Affinché F_λ sia una contrazione $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$ deve essere minore di 1. Per studiare dove $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} < 1$, consideriamo separatamente i casi $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$.
Se $\lambda > 0$, $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} < 1$ per quei valori di λ per cui $1-e^{-\lambda} < \lambda$, ma $1-\lambda < e^{-\lambda}$ per ogni $\lambda > 0$.
Se $\lambda < 0$, $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} < 1$ per quei valori di λ per cui $1-e^{-\lambda} > \lambda$, ossia quando la funzione $h(\lambda) = 1-\lambda-e^{-\lambda}$ é positiva. Osserviamo che la derivata prima $h'(\lambda) = -1+e^{-\lambda}$ della funzione $h(\lambda)$ é positiva per ogni λ minore di zero, quindi la funzione h é crescente per $\lambda < 0$. Poiché $h(0) = 0$, $h(\lambda) < 0$ per ogni λ minore di zero; $1-\lambda-e^{-\lambda} < 0$ e quindi per λ minore di zero F_λ non é una contrazione. Concludendo, F_λ é una contrazione per ogni λ maggiore di zero.