Soluzioni 2- Am3

Dott. Claudia Di Giulio

14 marzo 2005

Esercizio 1

1. Il polinomio caratteristico associato
$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$
ha radici $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. La soluzione generale e' $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

2. Il polinomio caratteristico associato
$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$
ha due radici complesse $\lambda_1 =$ e $\lambda_2 =$. La soluzione generale e' $y(x) = c_1 e^{-2x} cosx + c_2 e^{-2x} senx$.

3. Il polinomio caratteristico associato
$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$
ha radice $\lambda = -2$. La soluzione generale e' $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$.

Esercizio 2

Il polinomio caratteristico associato
$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$
ha radici $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. La soluzione generale e' $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$. Dalle condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 3$ si ottiene il sistema:
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 3 \end{cases}$$
che ha soluzione $c_1 = 1$ e $c_2 = -1$. La soluzione del problema assegnato é $y(x) = e^{2x} - e^{-x}$.

Esercizio 3

1. Si cerca la soluzione particolare $\bar{y}(x)$ ponendo $\bar{y}(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, e si calcola $\bar{y}'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1$ e $\bar{y}''(x) = 6a_3 x + 2a_2$. Quindi $\bar{y}'' + \bar{y} = a_3 x^3 + a_2 x^2 + (6a_3 +$

$a_1)x + 2a_2 + a_0$. Dopo aver posto $a_3x^3 + a_2x^2 + (6a_3 + a_1)x + 2a_2 + a_0 = x^3 - 2$ si risolve il sistema

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_2 = 0 \\ 6a_3 + a_1 = 0 \\ 2a_2 + a_0 = -2 \end{cases}$$

da cui si ottiene $a_0 = -2$, $a_1 = -6$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$; per cui la soluzione particolare é $\bar{y}(x) = x^3 - 6x - 2$

La soluzione dell'equazione omogenea $y'' + y = 0$ é $y_0(x) = c_1 cosx + c_2 senx$; l'insieme delle soluzioni é dato da $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 cosx + c_2 senx + x^3 - 6x - 2$.

2. Si cerca la soluzione particolare $\bar{y}(x)$ ponendo $\bar{y}(x) = Asenx + Bcosx$, e si calcola $\bar{y'}(x) = Acosx - Bsenx$ e $\bar{y''}(x) = -Asenx - Bcosx$. Quindi $\bar{y''} + \bar{y'} + 2y = (A-B)senx + (A+B)cosx = 2cosx$. La soluzione particolare é $\bar{y}(x) = senx + cosx$. La soluzione dell'equazione é $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$; poiché $y_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}(c_1 cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 sen\frac{\sqrt{7}}{2}x)$, l'insieme delle soluzioni é dato da $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(c_1 cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + c_2 sen\frac{\sqrt{7}}{2}x) + senx + cosx$.

3. Dopo aver posto $\bar{y}(x) = Ae^{2x}$ si procede in modo analogo agli esercizi precedenti e si calcola la soluzione $y(x) = c_1 + c_2e^{5x} - \frac{1}{2}e^{2x}$.

Esercizio 4

La soluzione dell'equazione omogenea é: $y_0(x) = c_1 cosx + c_2 senx$. per trovare una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti si risolve il sistema

$$\begin{cases} c_1' cosx + c_2' senx = 0 \\ -c_1' senx + c_2' cosx = 1/senx \end{cases}$$

Si trova $c_1' = -1$, $c_2' = cosx/senx$; una primitiva di tali funzioni é data da
$c_1(x) = -x$, $c_2(x) = log\,|senx|$.
Perció una soluzione particolare é $\bar{y}(x) = -xcosx + senxlog\,|senx|$. L'integrale generale dell'equazione data é:

$$y(x) = c_1 cosx + c_2 senx - xcosx + senxlog\,|senx|$$

Esercizio 5

La soluzione dell'equazione omogenea é: $y_0(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$. Una soluzione particolare $\bar{y}(x) = \frac{1}{2}e^x x^2$ della non omogenea si calcola ponendo $\bar{y}(x) = e^x(a_2x^2 + a_1x + a_0)$ e risolvendo come nell'esercizio 3. L'integrale generale dell'equazione data é $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 e^x$. Dalle condizioni $y(0) = 1$ e $y'(0) = -1$ si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = -1 \end{cases}$$

che ha soluzione $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$, quindi la soluzione del problema assegnato é $y(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 e^x$.

Esercizio 6

Per determinare alcune proprietá del grafico delle soluzioni del problema di Cauchy osserviamo che la derivata y' é positiva se

$$y' = (y^2 - 4y + 3)^3 = (y-1)^3(y-3)^3 > 0$$

ció si verifica se y é esterno all'intervallo [1;3]. Inoltre $y' < 0$ se $y \in (1;3)$ e $y' = 0$ se $y = 1$ oppure se $y = 3$.Dato che la condizione iniziale é $y(0) = 2$, per la continuitá di $y(x)$ risulta $y(x) \in [1;3]$ in un intorno di $x_0 = 0$ e quindi $y'(x) < 0$ in tale intorno. Pertanto la soluzione é decrescente in un intorno di $x = 0$. Ci chiediamo se é possibile che la soluzione diventi negativa per qualche $x > 0$. Se cosí fosse, per il teorema di esistenza degli zeri esisterebbe $x_1 > 0$ tale che $y(x_1) = 1$. Allora la soluzione y sarebbe soluzione anche del problema di Cauchy

$$1)\begin{cases} y' = (y^2 - 4y + 3)^3 \\ y(x_1) = 1 \end{cases}$$

Ma anche la funzione $y = 1$ é soluzione del problema di Cauchy 1), per il teorema di unicitá, la soluzione é $y(x) \equiv 1$, in contrasto con $y(0) = 2$. Quindi $y(x)$ non assume mai il valore 1 e quindi é tale che $y(x) > 1$ per ogni x. Analogamente $y(x) < 3$ per ogni x. Tenendo conto della monotonia, ne segue che $y(x)$ é definita in tutto $\Re$ ed é limitata su $\Re$. Sia $l \in [1;2]$ il limite di $y(x)$ per $x \to \infty$. Dalle condizioni $lim_{x\to\infty} y(x) = l$, $lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$, $y' = (y^2 - 4y + 3)^3$ otteniamo $(l^2 - 4l + 3)^3 = 0$, ossia $l = 1$ oppure $l = 3$. Poiché $y(0) = 2$ e che $y(x)$ é decrescente, $y(x)$ converge ad l per $x \to +\infty$. Analogamente $y(x)$ converge a 3 per $x \to -\infty$. Per lo studio della convessitá si calcola $y'' = 3(y^2 - 4y + 3)^2(2y - 4)y'$. Poiché $y' < 0$, $y''(x) > 0$ se e solo se $y < 2$. La soluzione y é convessa se $y(x) < 2$, ossia per $x > 0$ ed é concava se $y > 2$, ossia per $x < 0$.