Esercitazione n°6

1 Massimi e minimi di funzioni di più variabili

Esercizio 1: Determinare i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x,y) = x^3 + y^3 + xy \qquad\qquad (b) f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$$

Sol.: Per trovare i punti critici di f dobbiamo risolvere il sistema $f_x = f_y = 0$ e poi studiare il comportamento di f in questi punti:

(a): $f_x = 3x^2 + y$, $f_y = 3y^2 + x$ da cui

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ 27x^4 + x = x(27x^3 + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0), (-1/3, -1/3)$$

Calcoliamo ora le derivate seconde:

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = 6x & f_{xy} = 1 \\ f_{yx} = 1 & f_{yy} = 6y \end{array}$$

Nei punti critici il determinante Hessiano è rispettivamente

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

$$H(-1/3, -1/3) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

da cui segue che $(0,0)$ non è di massimo né di minimo perché la matrice delle derivate seconde è indefinita nell'origine, mentre $(-1/3, -1/3)$ è un punto di massimo perché la matrice delle derivate seconde ha determinante positivo e $f_{xx}(-1/3, -1/3) = -2 < 0$.

(b): $f_x = -32xy + 1$, $f_y = 16y^3 - 16x^2$ da cui

$$\begin{cases} -32xy + 1 = 0 \\ 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -32x^{5/3} + 1 = 0 \\ y = x^{2/3} \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (1/8, 1/4)$$

Per le derivate seconde abbiamo:

$$\begin{array}{ll} f_{xx} = -32y & f_{xy} = -32x \\ f_{yx} = -32x & f_{yy} = 48y^2 \end{array}$$

Nel punto critico il determinante Hessiano è

$$H(1/8, 1/4) = \begin{vmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3/4 \end{vmatrix} = -22 < 0$$

da cui segue che $(1/8, 1/4)$ non è di massimo né di minimo perché la matrice delle derivate seconde è indefinita.

Esercizio 2: Determinare i punti di massimo minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

Sol.: Calcoliamo le derivate parziali di f:

$$f_x = \frac{y(1 + x^2 + y^2) - xy(2x)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{y(1 - x^2 + y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

ed analogamente

$$f_y = \frac{x(1 + x^2 + y^2) - xy(2y)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{x(1 + x^2 - y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Esse si annullano contemporaneamente se e solo se

$$\begin{cases} y(1 - x^2 + y^2) = 0 \\ x(1 + x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

Determiniamo le soluzioni:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 + y^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Dunque l'unico punto critico di f è $(0, 0)$.

Il calcolo delle derivate seconde di f risulta complesso, quindi per stabilire se l'origine è un punto di massimo o di minimo è più rapido studiare la funzione in un intorno di $(0, 0)$.

Nel primo quadrante ($x > 0$, $y > 0$) la funzione è sempre positiva, mentre nel secondo quadrante ($x < 0$, $y > 0$) la funzione è sempre negativa. Dunque l'origine non può essere un punto di massimo né di minimo.

Esercizio 3: Determinare i punti di massimo e minimo relativo di

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

Sol.: Le derivate parziali sono $f_x = y\cos(xy)$, $f_y = x\cos(xy)$ e si annullano in $(0, 0)$ e nei punti in cui $\cos(xy) = 0$, cioè sulle iperboli $xy = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Per le derivate seconde si ha

$$f_{xx} = -y^2\sin(xy) \qquad f_{xy} = f_{yx} = \cos(xy) - xy\sin(xy) \qquad f_{yy} = -x^2\sin(xy)$$

ed il determinante Hessiano risulta

$$H(f(x,y)) = x^2y^2\sin^2(xy) - [\cos(xy) - xy\sin(xy)]^2 =$$
$$= -\cos^2(xy) + 2xy\sin(xy)\cos(xy)$$

Dunque

$$H(f(0,0)) = -1 \quad H(f(x, \tfrac{1}{x}(\tfrac{\pi}{2} + n\pi))) = 0$$

Il punto $(0,0)$ non è massimo né minimo, mentre sulla famiglia di iperboli $xy = \frac{\pi}{2} + n\pi$ osserviamo che

$$-1 \leq \sin(xy) \leq 1$$

e che sulla famiglia $xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ si ha $f(x,y) = 1$ (dunque sono punti di massimo), mentre sulla famiglia di iperboli $xy = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ si ha $f(x,y) = -1$ (e dunque sono punti di minimo per f).

Esercizio 4: Determinare se l'origine è un punto critico, ed eventualmente stabilirne la natura, per le seguenti funzioni:

$$(a) f(x,y) = x^4 + y^4 + z^4 \qquad\qquad (b) f(x,y) = x^4 + y^4 - z^4$$

Sol.: (a): Per le derivate parziali si ha

$$f_x = 4x^3 \qquad f_y = 4y^3 \qquad f_z = 4z^3$$

dunque $(0,0,0)$ è un punto critico per f. Le derivate seconde pure valgono invece

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{yy} = 12y^2 \qquad f_{zz} = 12z^2$$

mentre quelle miste sono identicamente nulle. La matrice Hessiana è pertanto nulla nell'origine. In ogni caso,

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq 0 \qquad \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e si annulla soltanto nell'origine che quindi è un punto di minimo (assoluto) per f.

(b): Analogamente al caso (a) abbiamo

$$f_x = 4x^3 \qquad f_y = 4y^3 \qquad f_z = -4z^3$$

ed inoltre

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{yy} = 12y^2 \qquad f_{zz} = -12z^2$$

con le derivate seconde miste identicamente nulle. Ancora una volta quindi $(0,0,0)$ è un punto critico in cui la matrice Hessiana è nulla. Però sulla curva $y = z = 0$

$$f(x,0,0) = x^4$$

ha un minimo nell'origine, mentre sulla curva $x = y = 0$

$$f(0,0,z) = -z^4$$

ha un massimo in $(0,0,0)$. Ne segue che l'origine non è un punto di massimo né di minimo per f.

Esercizio 5: Sia $a = (a_1, \dots, a_n)$ un vettore non nullo di $\mathbb{R}^n$. Stabilire quali sono i punti di massimo o minimo su $\mathbb{R}^n$ di

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j x_i x_j.$$

Sol.: Osserviamo che

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j x_i x_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right)^2 \geq 0$$

Dunque f ha punti critici se e solo se si annullano simultaneamente le equazioni

$$2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) a_i = 0$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. Poiché $a \neq 0$ ciò equivale a richiedere che

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

ossia che $x = (x_1, \dots, x_n)$ sia ortogonale ad a. Tali punti sono tutti di minimo perché f si annulla.

2 Massimi e minimi vincolati

Analizziamo ora in che modo possiamo studiare i massimi e minimi di una funzione f quando imponiamo delle condizioni (vincoli) alle variabili. Ci limiteremo per semplicità al caso di funzioni di due sole variabili. Se l'equazione del vincolo è data in forma esplicita, ossia nel caso in cui le variabili x, y si possano esprimere come funzioni $(x(t), y(t))$ di un parametro t, allora il problema si riduce a studiare la funzione composta

$$\alpha(t) = f(x(t), y(t))$$

i cui punti critici (e la loro natura) si determinano derivando rispetto al parametro t.

Le cose sono più complesse se l'equazione del vincolo è data nella forma implicita $g(x, y) = 0$. In tal caso ci si può ricondurre ad una forma esplicita grazie al seguente teorema:

Teorema 2.1 (del Dini o della funzione implicita) *Sia $g(x, y)$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1(A)$ con A aperto di $\mathbb{R}^n$, e sia $p = (x_0, y_0)$ un punto di A tale che*

$$g(p) = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(p) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di x_0, un intorno V di y_0 ed è definita implicitamente una funzione $h : U \longrightarrow V$ tale che per ogni $x \in U$

$$g(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = h(x).$$

Inoltre h è di classe $\mathcal{C}^1$ in U e si ha

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x,h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x,h(x))}$$

Dal teorema sappiamo che, almeno localmente, esiste una espressione esplicita per il vincolo $g(x,y) = 0$, tramite la funzione implicita h. Possiamo quindi studiare la funzione composta

$$k(x) = f(x,h(x))$$

Derivando rispetto ad x otteniamo che i punti critici soddisfano

$$k'(x) = f_x(x,h(x)) + f_y(x,h(x))h'(x) = 0$$

ossia, esplicitando la derivata di h,

$$f_x(x,h(x))g_y(x,h(x)) = f_y(x,h(x))g_x(x,h(x))$$

e ciò è vero se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui

$$f_x(x,h(x)) + \lambda g_x(x,h(x)) = 0$$

$$f_y(x,h(x)) + \lambda g_y(x,h(x)) = 0$$

Ne segue che i punti critici di f lungo il vincolo g sono individuati dal sistema

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Tale metodo di ricerca dei punti critici della funzione f vincolata è detto metodo dei **moltiplicatori di Lagrange**.

Esercizio 6: Determinare massimi e minimi di

$$f(x,y) = xy$$

sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

Sol.: Cerchiamo i punti critici col metodo dei moltiplicatori di Lagrange: $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = y + 2\lambda x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = x + 2\lambda y = 0 \\ g = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -2\lambda x \\ x + 2\lambda(-2\lambda x) = 0 \\ g = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} \lambda = 1/2 \\ y = -x \\ x = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} \lambda = -1/2 \\ y = x \\ x = \pm 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

Alternativamente, possiamo parametrizzare la circonferenza

$$x = \cos t \qquad y = \sin t$$

In tal caso la funzione sul vincolo diventa

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin 2t$$

Basta quindi studiare la funzione g che è però ora di una sola variabile:

$$g'(t) = \cos 2t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2t = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

La derivata seconda

$$g''(t) = -2 \sin 2t$$

vale 2 se n è pari e per tali valori di t abbiamo $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, i quali sono punti di minimo per f, mentre vale -2 se n è dispari ed in tal caso $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, che sono invece punti di massimo.

3 Altri esercizi svolti

Esercizio 7: Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy$$

Sol.: Le derivate parziali di f sono $f_x = 4xy + 2y^2 - 2xy^2 - 4y$, $f_y = 2x^2 + 4xy - 2x^2y - 4x$. Pertanto, per i punti critici,

$$\begin{cases} 4xy + 2y^2 - 2xy^2 - 4y = 0 \\ 2x^2 + 4xy - 2x^2y - 4x = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} y(y-2)(1-x) = 0 \\ x(x-2)(1-y) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 2 \\ x(x-2) = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

I punti critici sono dunque $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, $(1,1)$.

Le derivate seconde sono

$$f_{xx} = 4y - 2y^2 \quad f_{xy} = f_{yx} = 4x + 4y - 4xy - 4$$
$$f_{yy} = 4x - 2x^2$$

Il determinante Hessiano è

$$H(f(x,y)) = (4y-2y^2)(4x-2x^2)-16[(x-1)(y-1)]^2 = 4xy(2-y)(2-x)-16[(x-1)(y-1)]^2$$

e nei punti critici vale

$$H(f(0,0)) = -16 \quad H(f(2,0)) = -16 \quad H(f(0,2)) = -16$$
$$H(f(2,2)) = -16 \quad H(f(1,1)) = 4$$

I primi quattro punti sono dunque di sella (né di massimo, né di minimo), mentre $(1,1)$ è di minimo perché $f_{xx}(1,1) = 2 > 0$.

Esercizio 8 : Determinare i punti di massimo e minimo relativo delle seguenti funzioni:

$$(a) f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (b) f(x,y) = xy|y|$$

Sol.: (a): le derivate parziali valgono, se $(x,y) \neq (0,0)$ $f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e non si annullano mai contemporaneamente, mentre f non è derivabile in $(0,0)$. Però com'è ovvio verificare

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq 0$$

e si annulla solo nell'origine, che pertanto è un minimo (assoluto) per f.

(b): $f_x = y|y|$, $f_y = 2x|y|$ si annullano in tutti i punti in cui $y = 0$. Si può vedere che tali punti non sono di massimo né di minimo osservando che $f(x_0, y) > 0$ cambia segno a seconda che $y > 0$ o $y < 0$ per ogni $x_0 \neq 0$ fissato, mentre per il caso in cui $x_0 = 0$ si noti che $f(x,y) > 0$ nel primo e terzo quadrante, mentre $f(x,y) < 0$ nel secondo e quarto quadrante.

Esercizio 9: Si verifichi che la funzione

$$f(x,y) = x^4 - 4x^2y + y^2$$

ammette come unico punto critico l'origine, che in tale punto il determinante Hessiano è nullo, che lungo ogni retta per l'origine f assume un minimo in $(0,0)$ e tuttavia l'origine non è punto di massimo né di minimo per f.

Sol.:

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 8xy = 4x(x^2-2y) = 0 \\ f_y = -4x^2 + 2y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'Hessiano:

$$H(f(0,0)) = \begin{vmatrix} 12x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 2 \end{vmatrix} (0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Consideriamo le rette per l'origine $y = mx$ $m \neq 0$. Abbiamo

$$g(x) = f(x, mx) = x^4 - 4mx^3 + m^2x^2$$

Ora

$$g'(0) = 0 \qquad g''(0) = 2m^2 > 0$$

dunque $x = 0$ è di minimo per f su tali rette. Sugli assi coordinati

$$f(x,0) = x^4 \qquad f(0,y) = y^2$$

che hanno entrambe un minimo nell'origine.

Sulle parabole $y = mx^2$ invece

$$f(x, mx^2) = x^4(1 - 4m + m^2)$$

che per $m = 1$, ad esempio, diventa $-2x^4$, mentre per $m = 5$ diventa $6x^4$, le quali hanno rispettivamente un massimo ed un minimo in $x = 0$. Pertanto l'origine non può essere né di massimo né di minimo per f.

Esercizio 10: Studiare i punti critici della funzione

$$f(x,y,z) = xyz^3$$

Sol.: Le derivate prime

$$f_x = yz^3 \qquad f_y = xz^3 \qquad f_z = 3xyz^2$$

si annullano contemporaneamente (insieme ad f) nei punti del piano $z = 0$ ed in quelli della retta $x = y = 0$. Le derivate seconde pure sono nulle, mentre per quelle miste:

$$f_{xy} = z^3 \qquad f_{xz} = 3yz^2 \qquad f_{yz} = 3xz^2$$

da cui la matrice Hessiana

$$D^2(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 0 & z^3 & 3yz^2 \\ z^3 & 0 & 3xz^2 \\ 3yz^2 & 3xz^2 & 0 \end{pmatrix}$$

che è identicamente nulla nei punti $(x,y,0)$, mentre nei punti $(0,0,z)$ vale

$$D^2(f(0,0,z)) = \begin{vmatrix} 0 & z^3 & 0 \\ z^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che ha determinante nullo ed i cui autovalori sono $0, z^3, -z^3$. Tale matrice è dunque indefinita (tranne in $(0,0,0)$ in cui è nulla) ed i punti $(0,0,z)$ con $z \neq 0$ non sono di massimo né di minimo per f.

Tale conclusione è valida anche per gli altri punti. Ciò si verifica scegliendo delle curve (o dei piani) su cui f assume valori di massimo e di minimo.

Fissiamo un punto $(x_0, y_0, 0)$ $x_0y_0 \neq 0$ e consideriamo la retta $x = x_0, y = y_0$. Su tale retta f vale

$$F(x_0, y_0, z) = x_0y_0z^3$$

che ha un punto di flesso in $z = 0$ (che dunque non è di massimo né di minimo per f).

Se invece $x_0y_0 = 0$ ed entrambi valgono 0 consideriamo le curve $y = ax, z = bx$ con a, b parametri entrambi non nulli.

$$f(x, ax, bx) = ab^3x^5$$

che ha ancora un punto di flesso in $x = 0$.

Quando $x_0y_0 = 0$ ma almeno uno tra x_0 e y_0 (diciamo x_0) è diverso da 0 consideriamo la curva $x = x_0, z = ay$:

$$f(x_0, y, ay) = a^3x_0y^4$$

che ha un minimo oppure un massimo in $y = 0$ a seconda che a sia maggiore o minore di 0.

Esercizio 11: Determinare massimi e minimi di

$$f(x, y) = x + y$$

sull'iperbole $g(x, y) = xy - 1 = 0$ e nel primo quadrante.

Sol.: Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per determinare i punti critici:

$$\begin{cases} f_x + \lambda g_x = 1 + \lambda y = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 1 + \lambda x = 0 \\ g = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{\lambda} \\ x = -\frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda^2} = 1 \end{cases}$$

che implica $\lambda = 1, x = y = -1$, oppure $\lambda = -1, x = y = 1$. Poiché ci limitiamo al primo quadrante ci interessa solo la seconda soluzione.

Per determinare la natura del punto critico, parametrizziamo l'iperbole:

$$g(x) = f(x, 1/x) = x + \frac{1}{x}$$

$$g''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad g''(1) = 2 > 0$$

Il punto che ci interessa è dunque un punto di minimo.