Esercitazione n°4

1 Serie di Taylor

Esercizio 1: Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

pur essendo $\mathcal{C}^\infty$ non è sviluppabile in serie di Taylor in $x = 0$.

Sol.: Determiniamo le derivate di f:

$$0 = f'(0) = \lim_{x\to 0} -\frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

Procedendo per induzione si vede che le derivate di $h(x) = e^{-1/x^2}$ sono il prodotto di $h(x)$ per un polinomio nella variabile $y = 1/x$. Poiché

$$\lim_{x\to 0} h(x)\frac{1}{x^\beta} = 0 \quad \forall\, \beta \geq 0$$

abbiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$$

Pertanto lo sviluppo in serie di $f(x)$, se esistesse, dovrebbe essere identicamente nullo e non potrebbe convergere a f.

Esercizio 2: Utilizzando lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$ determinare lo sviluppo in serie di $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Sol.: Si ricordi che definendo

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$ risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

Poniamo $y = x^2$. Sappiamo che

$$\sqrt{1+y} = (1+y)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} y^n$$

da cui

$$\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^{2n}$$

La funzione che cerchiamo è la derivata di $\sqrt{1+x^2}$. Dunque

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \binom{1/2}{n} x^{2n-1}$$

Possiamo esplicitare meglio lo sviluppo in serie calcolando il coefficiente binomiale:

$$\binom{1/2}{n} = \frac{1/2(-1/2)\cdots(1/2-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

da cui

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}x^{2n-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k+1}$$

Esercizio 3: Determinare lo sviluppo in serie di $f(x) = \arcsin x$.

Sol.: Osserviamo che $\arcsin x$ è una primitiva di $1/\sqrt{1-x^2}$. Ancora dallo sviluppo di $(1+x)^\alpha$ abbiamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n}$$

Ora per $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{-1/2(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} = \\ &= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!} = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\end{aligned}$$

da cui

$$\arcsin x = \int\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right)dx = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Esercizio 4: Sviluppare in serie di Taylor la funzione

$$f(x) = \frac{4}{(1-x)(1+3x)}.$$

Sol.: Spezziamo f nella somma di due frazioni il cui denominatore sia di primo grado:

$$\frac{4}{(1-x)(1+3x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+3x} = \frac{1}{1-x} + \frac{3}{1+3x}$$

Abbiamo

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall\, x \in (-1,1)$$

mentre

$$\frac{3}{1+3x} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{n+1} x^n \quad \forall\, x \in (-1/3, 1/3)$$

da cui

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[1 + (-1)^n 3^{n+1}\right] x^n$$

nell'intervallo $(-1/3, 1/3)$.

Esercizio 5: Sviluppare in serie $\log x$ per $x \in (0,2)$.

Sol.: Il logaritmo è una primitiva di $1/x$. Dunque

$$\log x = \int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{1-(1-x)}\, dx = \int \sum_{k=0}^{\infty}(1-x)^k\, dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

2 Logaritmo e potenze ad esponente complesso

2.1 Logaritmo complesso

Dato un numero complesso z, esso può essere descritto nella forma

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$$

dove $\operatorname{Arg} z$ è un angolo variabile nell'intervallo $(-\pi, \pi]$.

Possiamo quindi definire la funzione

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$$

Osserviamo anzitutto che poiché

$$e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

abbiamo non solo

$$e^{\operatorname{Log} z} = e^{\log|z|} e^{i \operatorname{Arg} z} = z$$

ma anche

$$e^{\operatorname{Log} z + 2k\pi i} = e^{\log|z|} e^{i \operatorname{Arg} z} e^{2k\pi i} = z.$$

D'altra parte, se $e^z = e^w$ allora

$$e^{z-w} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z - w = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dunque una volta trovata una delle determinazioni del logaritmo, tutte le altre si ottengono a partire da quella aggiungendo multipli interi di $2\pi i$.

Esercizio 6: Mostrare che

$$\operatorname{Log}(i-1)^2 \neq 2\operatorname{Log}(i-1).$$

Sol.: Abbiamo

$$i - 1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$$

da cui

$$2\operatorname{Log}(i-1) = 2\left(\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{3\pi}{4}\right) = \log 2 + i\frac{3\pi}{2}$$

Invece

$$\operatorname{Log}(i-1)^2 = \operatorname{Log}(-2i) = \log 2 - i\frac{\pi}{2}$$

Nota: si osservi che si ha sempre

$$\operatorname{Log}(ab) \equiv \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b \qquad \mod 2\pi i$$

Possiamo anche definire il logaritmo sui complessi stabilendo che l'argomento vari nell'intervallo $[0, 2\pi)$ anziché in $(-\pi, \pi]$. In tal caso poniamo

$$\log z = \log|z| + i \arg z \qquad \arg z \in [0, 2\pi)$$

Proposizione 2.1 *Non esiste alcuna funzione $g(z)$ continua su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $e^{g(z)} = z$ $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

DIM. Se esistesse una tale funzione g si dovrebbe avere in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

$$g(z) = \operatorname{Log} z + 2k_1\pi i$$

mentre in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$

$$g(z) = \log z + 2k_2\pi i$$

per qualche $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ Ora, nel semipiano $\{\Im z > 0\}$ le due funzioni $\operatorname{Log} z$ e $\log z$ coincidono, mentre in $\{\Im z < 0\}$ abbiamo $\log z = \operatorname{Log} z + 2\pi i$. Le costanti k_1 e k_2 dovrebbero quindi soddisfare (rispettivamente nei due semipiani) le relazioni

$$\begin{aligned} k_1 &= k_2 \\ k_1 &= k_2 + 1 \end{aligned}$$

che non possono essere mai verificate. $\square$

Esercizio 7: Determinare tutte le soluzioni di $e^z = \sqrt{3} + i$.

Sol.: Come prima cosa scriviamo $\sqrt{3}+i$ nella sua forma trigonometrica:

$$\sqrt{3}+i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

da cui

$$\log(\sqrt{3}+i) = \log 2 + i\frac{\pi}{6}$$

Dunque si ha $e^z = \sqrt{3}+i$ se e solo se

$$z = \log 2 + i\frac{\pi}{6} + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 8: Determinare tutte le soluzioni di $e^z = -i/2$.

Sol.: In forma trigonometrica

$$-\frac{i}{2} = \frac{1}{2}(\cos -\frac{\pi}{2} + i\sin -\frac{\pi}{2})$$

da cui

$$\mathrm{Log}(-\frac{i}{2}) = -\log 2 - i\frac{\pi}{2}$$

e dunque le soluzioni cercate sono

$$z = -\log 2 - i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.2 Potenze con esponente complesso

Una volta definito il logaritmo, possiamo definire anche le potenze ad esponente complesso ponendo:

$$w^z = e^{z\,\mathrm{Log}\,w}$$

Tale espressione è detta **determinazione principale** di w^z. Esistono in generale più determinazioni di una potenza complessa, com'è ovvio ricordando che esistono infinite determinazioni del logaritmo.

Cerhiamo di stabilire quante sono tali determinazioni. Per far ciò verifichiamo quando si ha

$$e^{z(\mathrm{Log}\,w+2k\pi i)} = e^{z(\mathrm{Log}\,w+2h\pi i)}$$

Tale condizione è verificata se e solo se

$$e^{2kz\pi i} = e^{2hz\pi i}$$

ossia se e solo se

$$e^{2(k-h)z\pi i} = 1$$

Ciò è possibile solo quando $h = k$ (per ogni z) oppure quando $(k-h)z$ è intero, e dunque z è razionale.

Se dunque $z = p/q$, abbiamo

$$e^{p/q\cdot(\operatorname{Log} w+2k\pi i)} = e^{p/q\cdot(\operatorname{Log} w+2h\pi i)}$$

se e solo se $k \equiv h \mod q$, pertanto w^z assume esattamente q valori distinti, mentre se $z \notin \mathbb{Q}$ w^z assume infiniti valori distinti.

Esercizio 9: Determinare tutti i possibili valori di $i^{1/2}$.

Sol.: L'esponente è razionale, pertanto esistono solo due valori distinti per tale potenza:

$$i^{1/2} = e^{(\log i+2k\pi i)/2} = e^{1/2\cdot\log i+k\pi i} = \pm e^{1/2\cdot i\pi/2} = \pm e^{i\pi/4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Esercizio 10: Determinare tutti i possibili valori di i^i.

Sol.: Abbiamo

$$i^i = e^{i(\log i+2k\pi i)} = e^{i(i\pi/2+2k\pi i)} = e^{-(\pi/2+2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 11: Determinare tutti i possibili valori di 1^{1-i}.

Sol.: Abbiamo

$$1^{1-i} = e^{(1-i)(\log 1+2k\pi i)} = e^{(1-i)(2k\pi i)} = e^{(1+i)(2k\pi)} = e^{2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3 Altri esercizi svolti

Esercizio 12: Dimostrare che la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ è sviluppabile in serie di Mac Laurin nell'intervallo $(-1,1)$ e determinarne lo sviluppo in serie per $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sol.: Calcoliamo le derivate di f nel punto $x = 0$. Abbiamo

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

e quindi per induzione

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

Se poniamo

$$\binom{\alpha}{n} := \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

la serie cercata è

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$$

Dobbiamo però effettivamente dimostrare che la somma di tale serie sia la nostra funzione $f(x)$.

Anzitutto osserviamo che, nel caso in cui α sia un numero naturale, tale somma è finita e coincide con la formula del binomio di Newton applicata a $(1+x)^\alpha$.
Se invece $\alpha \notin \mathbb{N}$ abbiamo dal criterio del rapporto

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\binom{\alpha}{n+1}|}{|\binom{\alpha}{n}|} = \frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)|} = \frac{|\alpha-n|}{n+1}$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n|}{n+1} = 1.$$

Ne segue che il raggio di convergenza della serie è 1. Poniamo ora nell'intervallo $(-1,1)$

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Facciamo vedere che il rapporto $g(x)/f(x)$ è costante. Allora, poiché $g(0) = f(0) = 1$, otterremo che g coincide con f, la quale è dunque sviluppabile in serie di Taylor. Abbiamo

$$\frac{d}{dx}[g(x)(1+x)^{-\alpha}] = g'(x)(1+x)^{-\alpha} - \alpha g(x)(1+x)^{-\alpha-1} = (1+x)^{-\alpha-1}[g'(x)(1+x) - \alpha g(x)]$$

Vogliamo quindi mostrare che $g'(x)(1+x) = \alpha g(x)$:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1}$$

da cui

$$(1+x)g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n}\right] x^n$$

Abbiamo inoltre

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} + n\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} =$$
$$= \binom{\alpha}{n}(\alpha-n+n) = \alpha\binom{\alpha}{n}$$

da cui

$$(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$$

come voluto.

Esercizio 13: Sviluppare in serie di Taylor la funzione

$$f(x) = \cosh(x).$$

Sol.: Dalla definizione del coseno iperbolico si ha

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Conosciamo lo sviluppo in serie di e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

da cui ricaviamo

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

e quindi

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{x^n}{n!} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Esercizio 14: Determinare lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

$$f(x) = \sinh(x).$$

Sol.: Si può procedere in due modi. Il primo consiste nell'utilizzare, come nell'esercizio precedente, la definizione del seno iperbolico e lo sviluppo di e^x. Altrimenti possiamo osservare che il seno iperbolico è una primitiva del coseno iperbolico. Dunque grazie all'esercizio precedente, ricordando che $\sinh(0) = 0$, abbiamo

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Esercizio 15: Sviluppare in serie $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ per $x \in (-1, 1)$.

Sol.: Si noti che

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\left[\log(1+x) - \log(1-x)\right]$$

Ora

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

mentre

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

da cui segue

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Esercizio 16: Determinare tutte le soluzioni di $e^z = 1 + i$.

Sol.: In forma trigonometrica

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

da cui

$$\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 - i\frac{\pi}{4}$$

e dunque le soluzioni cercate sono

$$z = \frac{1}{2}\log 2 - i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 17: Determinare tutti i possibili valori di i^2 tramite la definizione di potenza complessa.

Sol.: Abbiamo

$$i^2 = e^{2(\log i + 2k\pi i)} = e^{2(i\pi/2 + 2k\pi i)} = e^{i\pi(1+4k)} = -1.$$

Esercizio 18: Determinare parte reale ed immaginaria di e^z per ogni $z \in \mathbb{C}$.

Sol.: Scriviamo z in forma trigonometrica fissando l'argomento nell'intervallo $(-\pi, \pi]$. Allora

$$z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}$$

da cui

$$\begin{aligned} e^z &= e^{|z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}} = e^{|z|(\cos(\mathrm{Arg}\,z) + i\sin(\mathrm{Arg}\,z))} \\ &= e^{|z|\cos\mathrm{Arg}\,z}(\cos(|z|\sin(\mathrm{Arg}\,z)) + i\sin(|z|\sin(\mathrm{Arg}\,z))). \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \Re(e^z) &= e^{|z|\cos\mathrm{Arg}\,z}\cos(|z|\sin(\mathrm{Arg}\,z)) \\ \Im(e^z) &= e^{|z|\cos\mathrm{Arg}\,z}\sin(|z|\sin(\mathrm{Arg}\,z)) \end{aligned}$$