AM2: Tracce delle lezioni- XI Settimana

FUNZIONI IMPLICITE E TEOREMA DEL DINI

Teorema del Dini o della funzione implicita

Sia $\quad f \in C^1(O),\ O\ $ aperto in $\mathbf{R}^2,\ (x_0, y_0) \in O$.

Sia $\qquad R_{\delta,\sigma}(x_0, y_0) := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \subset O.\quad$ Allora

$$f_y(x_0, y_0) \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, \delta, \sigma > 0,\ \ \varphi \in C^1((x_0 - \delta, x_0 + \delta), (y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)) :$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0),\quad (x, y) \in R_{\delta,\sigma}(x_0, y_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = \varphi(x)$$

$$f_x(x_0, y_0) \neq 0 \ \Rightarrow\ \exists\, \delta, \sigma > 0,\ \ \varphi \in C^1((y_0 - \sigma, y_0 + \sigma), (x_0 - \delta, x_0 + \delta)) :$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0),\quad (x, y) \in R_{\delta,\sigma}(x_0, y_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \varphi(y)$$

Inoltre,

$$\varphi'(x) \ = \ -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}, \qquad (\varphi'(y) \ = \ -\frac{f_y(\varphi(y), y)}{f_x(\varphi(y), y)})$$

Prova. Sia $f_y(x_0, y_0) > 0$. Allora $\exists \delta',\ \sigma, r > 0 :\ \ f_y \geq r > 0$ in $R_{\delta,\sigma}(x_0, y_0)$. Quindi $\ f(x_0, y_0 - \sigma) < f(x_0, y_0) < f(x_0, y_0 + \sigma)\ $ e quindi $\ \exists\, \delta \leq \delta' :$ $|x - x_0| \leq \delta \ \Rightarrow\ f(x, y_0 - \sigma) < f(x_0, y_0) < f(x, y_0 + \sigma)$. Dunque,

$$|x - x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \exists!\, y = \varphi(x) \in [y_0 - \sigma, y_0 + \sigma] \ \text{ tale che } \ f(x, \varphi(x)) = f(x_0, y_0)$$

Verifichiamo ora che $\ \varphi$ é continua, ed infatti $\ \varphi \in C^1((x_0 - \delta, x_o + \delta))$:

$$0 = f(x + s, \varphi(x + s)) - f(x, \varphi(x)) = \int_0^1 \tfrac{d}{dt}[f(x + ts, t\varphi(x + s) + (1 - t)\varphi(x))]\, dt$$

$$\Rightarrow \quad [\varphi(x + s) - \varphi(x)] \int_0^1 f_y(x + ts, t\varphi(x + s) + (1 - t)\varphi(x)) dt \ =$$

$$-\int_0^1 f_x(x + ts, t\varphi(x + s) + (1 - t)\varphi(x))\, s\, dt \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x + s) - \varphi(x)| \leq \frac{O(s)}{r}$$

e quindi, dividendo per s e passando al limite sotto segno di integrale,

$$[\lim_{s\to 0} \frac{\varphi(x + s) - \varphi(x)}{s}\ ]\ f_y(x, \varphi(x)) \ = \ -f_x(x, \varphi(x))$$

PRINCIPIO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Siano $f, g \in C^1(O)$, e sia $\Gamma = \{g = 0\}$.
Sia $u_0 \in \Gamma$ tale che $f(u_0) \le f(u)$ $\forall u \in \Gamma$. Se $\nabla g(u_0) \neq 0$ allora

$$\exists\, \lambda \in \mathbf{R} : \qquad \nabla f(u_0) \;=\; \lambda \nabla g(u_0)$$

Infatti, intorno ad $u_0 = (x_0, y_0)$, il **vincolo** Γ si scrive, in base al Teorema del Dini ed all'ipotesi su Γ, come, diciamo, $(x, \varphi(x))$ ove φ é una funzione C^1 intorno ad x_0. Ma allora $x \to f(x, \varphi(x))$ ha un minimo in x_0 e quindi

$$0 \;=\; \frac{d}{dx}\, f(x, \varphi(x))_{|x=x_0} \;=\; f_x(u_0) \;+\; f_y(u_0)\varphi'(x_0) \;=\; f_x(u_0) \;-\; f_y(u_0)\,\frac{g_x(u_0)}{g_y(u_0)}$$

Posto $\lambda := \frac{f_y(u_0)}{g_y(u_0)}$ si ha quindi $f_x(u_0) = \lambda g_x(u_0)$ e cioé $\nabla f(u_0) \;=\; \lambda \nabla g(u_0)$.

NOMENCLATURA.

- La funzione φ, che si trova risolvendo l'equazione $f(x, y) = 0$ considerando y come dato e x come incognita (o viceversa), si chiama **funzione implicitamente definita** dall'equazione $f(x, y) = 0$.
Da $\varphi'(x) \;=\; -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$ segue anche che $f \in C^\infty(O) \;\Rightarrow\; \varphi \in C^\infty$.

-$\Gamma_c := \{(x, y) :\; f(x, y) = c\} \;=\; f^{-1}(c),\;\; c \in \mathbf{R}$ é **insieme di livello** di f.
Se $\nabla f(u) \neq 0, \forall u \in \Gamma_c$, c si chiama **valore (o livello) regolare** di f.

$u_0 \in O$ é **punto regolare (singolare)** se $\nabla f(u_0) \neq 0$ ($\nabla f(u_0) = 0$): un livello é regolare se non contiene punti singolari. .

Dal Teorema del Dini:

-l'insieme di livello $\Gamma_c = \{f = c\}$ é, attorno a un punto regolare u_0, il grafico di una funzione regolare φ (nella variabile x od y) e la retta tangente alla curva di livello Γ_c in u_0 ha equazione $< \nabla f(u_0), u - u_0 >= 0$,

-in particolare, $\nabla f(u_0)$ é ortogonale (in u_0) alla curva di livello $\{f(u) = f(u_0)\}$

-se c é valore regolare, Γ_c é **curva (cartesiana) regolare** , ovvero é, attorno ad ogni suo punto, un grafico cartesiano

Esempi ed esercizi

1 Se $f(x,y)=x^2+y^2$, ogni $c\neq 0$ é **valore regolare**. Gli **insiemi di livello** $\{f=c\}$ (non vuoti se e solo se $c\geq 0$), sono **curve regolari** (e infatti circonferenze) se $c>0$, mentre l'insieme di livello $\{f=0\}$ si riduce al punto $(0,0)$.

L 'equazione $x^2+y^2=r^2$ definisce implicitamente le funzioni

$$y=\sqrt{r^2-x^2},\quad y=-\sqrt{r^2-x^2},\quad |x|\leq r,\quad x=\sqrt{r^2-y^2},\quad x=-\sqrt{r^2-y^2},\quad |y|\leq r$$

che permettono di descrivere (localmente) gli insiemi $x^2+y^2=r^2$ come grafici.

2 Se $f(x,y)=x^2-y^2$, ogni $c\neq 0$ é valore regolare. Gli insiemi di livello sono iperboli rappresentate in forma cartesiana dalle **funzioni definite implicitamente** dall'equazione $x^2-y^2=c$, ovvero

$$y=\sqrt{x^2-c},\qquad y=-\sqrt{x^2-c},\qquad (|x|\geq\sqrt{c},\quad \text{se}\ \ c>0)$$

$c=0$ é **valore singolare**: l'insieme di livello non é piú, attorno a zero, un grafico cartesiano. Esso é infatti dato dalla coppia di rette $x^2-y^2=0$

Notiamo il **cambiamento dei sottolivelli** $\{(x,y): f(x,y)\leq c\}$ quando c 'attraversa' il valore critico 0: $\{f\leq c\}$ non é connesso se $c<0$ mentre lo é per $c>0$.

3 Trovare, tra i punti (x,y) tali che $x^6+y^6=6$
quelli che hanno minima/massima distanza dall'origine.
Posto $d(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=x^6+y^6-6$, $\Gamma=g^{-1}(0)$,
si tratta di trovare i punti di minimo/massimo di d su Γ.

Siccome $\nabla g(x,y)=0\Leftrightarrow x=0=y$, Γ é una curva regolare e quindi, per il principio dei Moltiplicatori di Lagrange, i punti di minimo/massimo di d su Γ si trovano tra le soluzioni del sistema (di Lagrange)

$$d_x=\lambda g_x,\quad d_y=\lambda g_y,\quad g=0\qquad\text{ovvero}\qquad x=3\lambda x^5,\quad y=3\lambda y^5,\quad x^6+y^6=6$$

La prima equazione é soddisfatta se $x=0$ ed allora , da $g=0$, segue $y=\pm 6^{\frac{1}{6}}$. Analogamente si trovano le soluzioni $(\pm 6^{\frac{1}{6}},0)$.

Se $xy\neq 0$, deve essere $3\lambda x^4=1=3\lambda y^4$ e quindi $|x|=|y|$ che, insieme a $x^6+y^6=6$, comporta $|x|=|y|=3^{\frac{1}{6}}$. Dunque le soluzioni del sistema di Lagrange sono

$$(\pm 6^{\frac{1}{6}},0),\qquad (0,\pm 6^{\frac{1}{6}}),\qquad (3^{\frac{1}{6}},\pm 3^{\frac{1}{6}}),\qquad (-3^{\frac{1}{6}},\pm 3^{\frac{1}{6}})$$

Concludiamo che

$$\min_{\Gamma}=d(\pm 6^{\frac{1}{6}},0)=d(0,\pm 6^{\frac{1}{6}})=6^{\frac{1}{3}},\qquad\qquad \max_{\Gamma} d=d(\pm 3^{\frac{1}{6}},\pm 3^{\frac{1}{6}})=2\,3^{\frac{1}{3}}$$

APPENDICE: Il Principio dei Moltiplicatori di Lagrange in $\mathbf{R}^n$

Siano $f, g \in C^1(O)$, O aperto in $\mathbf{R}^n$. Sia $u \in O$ tale che

$$\exists r > 0 : \quad \|v - u\| \leq r, \quad g(v) = g(u) \quad \Rightarrow \quad f(v) \geq f(u)$$

Allora, $\qquad \nabla g(u) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda : \quad \nabla f(u) = \lambda \nabla g(u)$

Possiamo (ovvie sostituzioni) supporre che $\quad u = 0, \;\; g(0) = f(0) = 0, \;\; \|\nabla g(0)\| = 1.$

Cominciamo col provare che $\qquad \exists \delta > 0, \epsilon > 0 : \; < k, \nabla g(0) >= 0, \;\; \|k\| < \delta \quad \Rightarrow$

$$\exists ! t = t(k) \in [-\epsilon, \epsilon] \;\; \text{tale che} \;\; g(t(k)\nabla g(0) + k) = 0 \;\; \text{e} \;\; t(k) = \circ(\|k\|)$$

Intanto, da $\quad \|\nabla g(0)\| = 1 \quad$ e dalla continuitá di $\quad \nabla g(v)$, segue che $\exists \delta > 0 : \; < \nabla g(v), \nabla g(0) > \; \geq \; \frac{1}{2} \quad$ se $\quad \|v\| \leq \delta \quad$ e quindi

$$\frac{d}{dt} g(t\nabla g(0) + k) =< \nabla g(t\nabla g(0) + k, \nabla g(0) > \; \geq \; \frac{1}{2} \;\; \text{se} \;\; t^2 + \|k\|^2 \leq \delta^2$$

e quindi $\quad t \to g(t\nabla g(0) + k) \quad$ é strettamente crescente in $\quad t \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}\delta, \frac{\sqrt{2}}{2}\delta]$ se $\|k\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$. $\quad$ In particolare $\quad \exists \epsilon > 0 : \quad g(-\epsilon \nabla g(0)) \; < \; 0 \; < \; g(\epsilon \nabla g(0))$ e quindi , per continuitá, prendendo eventualmente un δ piú piccolo,

$$g(-\epsilon \nabla g(0) + k) < 0 < g(\epsilon \nabla g(0) + k) \;\; \text{se} \;\; \|k\| \leq \delta$$

che, insieme alla stretta monotonia, comporta che $\quad t \to g(t\nabla g(0) + k) \quad$ ha, se $\|k\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\delta \quad$ esattamente uno zero in $\quad [\epsilon, \epsilon]$, che chiameremo $t(k)$. $\quad$ Poi, $< \nabla g(0), k >= 0, \;\; \|k\| < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 = g(t(k)\nabla g(0) + k) =< \nabla g(0), t(k)\nabla g(0) + k > + \circ (|t(k) + \|k\|) = t(k) + \circ(|t(k) + \|k\|) \quad$ cioé, fissato $\rho > 0, \;\; \exists \sigma_\rho : \quad \|k\| < \sigma_\rho \quad \Rightarrow$ $|t(k)| \leq \rho(|t(k) + \|k\|) \quad \Rightarrow \quad |t(k)| \leq 2\rho\|k\|.$

Infine, dall'ipotesi su f segue che, $\quad < \nabla g(0), k >= 0, \;\; \|k\| = 1, \;\; 0 < \tau \leq \frac{\delta}{2} \quad \Rightarrow$

$$0 \leq \frac{f(t(\tau k)\nabla g(0) + \tau k)}{\tau} =< \nabla f(0), \frac{t(\tau k)}{\tau}\nabla g(0) + k > + \circ (1) \to_{\tau \to 0} < \nabla f(0), k >$$

e quindi $\quad < \nabla g(0), k >= 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq < \nabla f(0), \pm k > \quad \Rightarrow \quad < \nabla f(0), k >= 0 \quad \Rightarrow$

$$\nabla f(0) \; =< \nabla f(0), \nabla g(0) > \quad \nabla g(0)$$

Infatti, se $\;\|h\| = 1\;$ e $\;u\;$ é un vettore tale che $\; < h, k >= 0 \;\; \Rightarrow \;\; < u, k >= 0,$ allora $\quad < h, u - < u, h > h > = \; 0 \quad \Rightarrow \; < u, u- < u, h > h > = \; 0 \quad \Rightarrow$ $< u- < u, h > h, u- < u, h > h >= 0 \quad \Rightarrow \quad u- < u, h > h = 0.$