AM2: Tracce delle lezioni-I settimana

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

Siano $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$; $\quad f : [a, b] \to \mathbf{R}$ $\quad$ limitata.

Somme (inferiori/superiori) di Riemann, integrale inferiore/superiore

Dati $n \in \mathbf{N}$ ed n punti in (a, b), $\quad a := x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} := b$, $\quad$ posto $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $\quad j = 1, \ldots, n+1$, $\quad l(I_j) := x_j - x_{j-1}$, $\quad$ indichiamo

$$s(f; x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=1}^{n+1} \inf_{I_j} f \quad l(I_j) \qquad\qquad S(f; x_1, \ldots, x_n) := \sum_{j=1}^{n+1} \sup_{I_j} f \quad l(I_j)$$

(rispettivamente, **somme inferiori, somme superiori**)

$$\underline{I}(f, [a, b]) := \sup\{s(f; x_1, \ldots, x_n) : \ a < x_1 < \ldots < x_n < b, \ \ n \in \mathbf{N}\}$$

$$\overline{I}(f, [a, b]) := \inf\{S(f; x_1, \ldots, x_n) : \ a < x_1 < \ldots < x_n < b, \ \ n \in \mathbf{N}\}$$

(rispettivamente, **integrale inferiore, integrale superiore**)

NOTA . $\quad$ Dati $\quad x_1 < \ldots < x_n, \qquad y_1 < \ldots < y_m$ $\quad$ in (a, b) $\quad$ si ha

$$s(f; x_1, \ldots, x_n) \ \leq \ S(f; y_1, \ldots, y_m) \qquad \text{e quindi} \qquad \underline{I}(f, [a, b]) \leq \overline{I}(f, [a, b])$$

Tuttavia, in generale, $\quad \underline{I}(f, [a, b]) < \overline{I}(f, [a, b])$. $\quad$ Sia ad esempio $\quad f = \chi_{\mathbf{Q}}$
(se $A \subset \mathbf{R}$, $\chi_A \equiv 1$ in A, $\chi_A \equiv 0$ fuori di A é ' funzione caratteristica di A').
É $\quad \overline{I}(\chi_{\mathbf{Q}}, [0, 1]) = 1$, $\qquad \underline{I}(\chi_{\mathbf{Q}}, [0, 1]) = 0$.
Infatti, é $\quad \sup_I \chi_{\mathbf{Q}} = 1$, $\qquad \inf_I \chi_{\mathbf{Q}} = 0$ $\qquad$ per ogni intervallo I.

Definizione . $\quad f$ si dice **integrabile** in $[a, b]$ $\quad$ se $\quad \overline{I}(f, [a, b]) = \underline{I}(f, [a, b])$.
In tal caso diremo che

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx := \overline{I}(f, [a, b]) \ = \ \underline{I}(f, [a, b]) \qquad \text{é l'}\textbf{integrale} \text{ di } f \text{ in } \qquad [a, b]$$

NOTAZIONE. $\quad \int_b^a f := -\int_a^b f$, $\quad \int_a^a f := 0$.

Una semplice conseguenza del Teorema di Heine-Cantor é il seguente

Teorema di Riemann . Sia f continua in $[a,b]$. Allora f é integrabile in $[a,b]$.

NOTA. La continuitá non é peró essenziale. Ad esempio, se A é un insieme finito di punti, χ_A é integrabile in $[a,b]$ per ogni a,b e $\int_a^b \chi_A = 0$. Vale infatti un teorema piú generale. Occorre la definizione:

$$A \subset \mathbf{R} \quad \textbf{é di misura nulla} \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists I_j, j \in \mathbf{N}: \quad A \subset \cup_j I_j, \quad \text{e} \quad \sum_j l(I_j) \leq \epsilon$$

Ad esempio, ogni insieme numerabile é di misura nulla.

Teorema di Vitali . Sia $D_f :=$ insieme dei punti di discontinuitá di f. Allora

f é integrabile in $[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad D_f \cap [a,b]$ é di misura nulla.

NOTA. In particolare, se f é integrabile in $[a,b]$, allora é integrabile su ogni intervallo contenuto in $[a,b]$.

Proprietá dell' integrale

(LINEARITÁ) Siano f, g integrabili in $[a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.
Allora $\alpha f + \beta g$ é integrabile in $[a,b]$ e

$$\int_a^b \alpha f + \beta g \;=\; \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

(POSITIVITÁ) $f \geq 0$ integrabile in $[a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \geq 0$.

Da $-|f| \leq f \leq |f|$ segue quindi, in virtú della linearitá e positivitá dell'integrale $(f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g\,!)$ e da $\int_a^b dt = b - a$ la fondamentale diseguaglianza

$$|\int_a^b f| \;\leq\; \int_a^b |f| \;\leq\; \sup_{[a,b]} |f| \;(b-a)$$

(ADDITIVITÁ) Sia f integrabile in $[a,b]$, $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$. Allora

$$\int_{x_1}^{x_2} f \;+\; \int_{x_2}^{x_3} f \;=\; \int_{x_1}^{x_3} f$$

Teorema della media . Se $f, g \in C([a,b])$, $g(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b]$, allora

$$\exists \xi \in [a,b]: \; \int_a^b fg \;=\; f(\xi) \int_a^b g. \;\; \text{In particolare} \;\; \exists \mu \in [a,b]: \; \int_a^b f \;=\; f(\mu)(b-a)$$

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass, f é dotata di minimo e di massimo in $[a,b]$, e si ha

$$(\min_{[a,b]} f)\ g(x)\ \le\ f(x)\, g(x)\ \le\ (\max_{[a,b]} f)\ g(x)\quad \forall x\in[a,b]$$

Quindi, passando agli integrali ed usando le proprietá di linearitá e positivitá, si ha

$$\min_{[a,b]} f\ \int_a^b g\ \le\ \int_a^b fg\ \le\ \max_{[a,b]} f\ \int_a^b g$$

Se $g\equiv 0$ non c'e niente da dimostrare. Possiamo quindi supporre $g(x)>0$ per qualche x, e quindi, essendo g continua, $\int_a^b g>0$. Allora

$$\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}\ \in [\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f]$$

e la tesi segue dal Teorema del valore intermedio.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo-1. Sia f limitata e integrabile in $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$. Sia

$$F(x)\ :=\ \int_{x_0}^x f(t)dt,\ \ x\in[a,b]$$

Allora

i) F é continua in $[a,b]$ (ed infatti Lipschitziana)

ii) f continua in $x\in(a,b)\quad\Rightarrow\quad F$ é derivabile in x e

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^x f(t)dt=f(x)$$

Dimostrazione. Usando l'additivitá dell'integrale, si ottiene

$$F(y)=F(x)+f(x)(y-x)+\int_x^y [f(t)-f(x)]\,dt,\quad \forall\ x,y\in[a,b]$$

Quindi $|F(y)-F(x)|\le(\sup_{[a,b]}|f|)\,|y-x|$. Poi, f continua in $x\in(a,b)\ \Rightarrow$

$$\sup_{|t-x|\le|h|}|f(t)-f(x)|\to_{|h|\to 0} 0\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt\ \to_{|h|\to 0} 0$$

Quindi, preso $y=x+h$ otteniamo $F(x+h)\ =\ F(x)\ +\ f(x)h\ +\ \circ(|h|)$, cioé F é derivabile in x con $F'(x)=f(x)$.

Corollario Sia f continua in $[a,b]$. Allora f é dotata di primitiva in (a,b).

Il Teorema Fondamentale del Calcolo-2 . Sia f continua in un intervallo aperto I. Sia P una primitiva di f in I, cioé $P' \equiv f$ in I. Allora

$$\int_a^b f \;=\; P\,|_a^b := [P(b) - P(a)] \qquad \forall\ [a,b] \subset I$$

Dimostrazione. Sia $F(x) = \int_a^x f$. Da $F' \equiv P'$ in I, segue che $F(x) - P(x) = F(a) - P(a) = -P(a)\ \forall x \in I$, e quindi $\int_a^b f \;=\; F(b) = P(b) - P(a)$.

Potremo quindi scrivere, per una funzione $f \in C^1([a,b])$,

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\, dx \;=\; f\,|_a^b$$

La formula di integrazione per parti . Siano $f, g \in C^1([a,b])$. Allora

$$\int_a^b fg' \;= fg\,|_a^b \;-\; \int_a^b f'g$$

Dimostrazione. $\int_a^b fg' \;+\; f'g \;=\; \int_a^b (fg)' \;=\; fg\,|_a^b$.

La formula di cambio di variabile . Siano $\varphi \in C^1(I),\ f \in C([a,b])$.

i) Se $[\alpha,\beta] \subset I,\ \ \varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$ allora

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

ii) Se $[a,b] \subset \varphi(I)$ e $\varphi'(t) \neq 0\ \ \forall t \in I$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Dimostrazione. Da TFC-1 e dalla regola della catena, segue:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_0}^{\varphi(t)} f(x)\,dx \;=\; f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall\, t \in (\alpha,\beta)$$

Integrando, si ottiene la i):

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \;=\; \int_\alpha^\beta [\frac{d}{dt}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)\,dx]\,dt \;=\; (\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f)\,|_\alpha^\beta \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$$

Se di piú $\varphi'(t) \neq 0\ \forall t \in I$, e quindi φ é invertibile in I, posto $\alpha := \varphi^{-1}(a)$, $\beta := \varphi^{-1}(b)$, la formula i) si riscrive appunto come in ii).

ALCUNI INTEGRALI CHE BISOGNA CONOSCERE

1. (integrali immediati)

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \;=\; \arctan x$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \;=\; \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt \;=\; \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt \;=\; \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad x_0, x > 1, \quad \text{op.} \quad x, x_0 < -1$$

Integrando le identitá $\sin^2 t \;\equiv\; \frac{1-\cos 2t}{2}$, $\sinh^2 t \;\equiv\; \frac{\cosh 2t - 1}{2}$, $\cos^2 t \;\equiv\; 1 - \sin^2 t$, $\cosh^2 t \;\equiv\; 1 + \sinh^2 t$, otteniamo

$$\int_0^x \sin^2 t\,dt \;=\; \frac{x - \sin x \cos x}{2}, \qquad \int_0^x \cos^2 t\,dt \;=\; \frac{x + \sin x \cos x}{2}$$

$$\int_0^x \sinh^2 t\,dt \;=\; \frac{\sinh x \cosh x \; - x}{2}, \qquad \int_0^x \cosh^2 t\,dt \;=\; \frac{x + \sinh x \cosh x}{2}$$

2. (mediante integrazione per parti)

$$\int_1^x \log t dt \;=\; 1 - x + x \log x, \qquad \int_0^x \arctan t\,dt \;=\; x \arctan x - \frac{\log(1+x^2)}{2}$$

Infatti,

$$\int_1^x \log t dt \;=\; -\int_1^x dt \;+\; t \log t|_1^x, \qquad \int_0^x \arctan t\,dt \;=\; -\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt \;+\; t \arctan t|_0^x.$$

3. (mediante cambio di variabile)

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}dt \;=\; \frac{1}{2}(\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}) \quad \forall x \in (-1,1)$$

$$\int_1^x \sqrt{t^2-1}dt \;=\; \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \cosh^{-1} x) = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})]$$

$$\int_0^x \sqrt{t^2+1}dt \;=\; \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x) = \frac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})]$$

Infatti, posto

$t = \sin s$, si ha $\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\sin^{-1} x} \cos^2 s\,ds = \frac{x+\sin x\cos x}{2}\Big|_0^{\sin^{-1} x}$;
$t = \cosh s$, si ha $\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt = \int_0^{\cosh^{-1} x} \sinh^2 s\,ds = \frac{\sinh x\cosh x - x}{2}\Big|_0^{\cosh^{-1} x}$;
$t = \sinh s$ si ha $\int_0^x \sqrt{t^2+1}\,dt = \int_0^{\sinh^{-1} x} \cosh^2 s\,ds = \frac{x+\sinh x\cosh x}{2}\Big|_0^{\sinh^{-1} x}$.

ESEMPI DI UTILIZZAZIONE DELLA FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILE

1. f pari $\Rightarrow$ $\int_0^x f(t)dt$ dispari. In paricolare, $\int_{-a}^a f = \int_0^a f - \int_0^{-a} f = 2\int_0^a f$

2. f dispari $\Rightarrow$ $\int_0^x f(t)dt$ pari. In particolare, $\int_{-a}^a f = \int_0^a f - \int_0^{-a} f = 0$.

3. Se f é T-periodica (cioé $f(t+T) = f(t) \quad \forall\, t$), allora

$$\int_0^x f(t)dt \text{ é T-periodica} \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^T f = 0$$

Per provare 1. e 2. basta usare il cambio di variabile $t = -s$:

$$\int_0^{-x} f(t)dt = -\int_0^x f(-s)\,ds$$

Prova di 3: usando il cambio di variabile $t = s + T$ si trova:

$$\int_T^{x+T} f(t)dt = \int_0^x f(s+T)ds = \int_0^x f$$

Quindi $\int_0^{x+T} f = \int_0^T f + \int_T^{x+T} f = \int_0^T f + \int_0^x f = \int_0^x f \ \forall x \Leftrightarrow \int_0^T f = 0$.
Notiamo che, assumendo f continua (ipotesi in realtá non necessaria per applicare la formula di cambio di variabile!) si puó argomentare anche cosí:

$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x+T} f - \int_0^x f\right] \equiv f(x+T) - f(x) \equiv 0$. Quindi $\int_0^{x+T} f - \int_0^x f = \int_0^T f$.

Esercizio. Provare, effettuando il cambio di variabile $t = s + \frac{\pi}{2}$, che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

Soluzione: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n t dt = -\int_0^{-\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$ perché $\cos t$ é pari.

APPENDICE

PROPRIETÁ DELLE FUNZIONI IPERBOLICHE

Definizione

$$\sinh x \ := \ \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad\qquad \cosh x \ := \ \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Le funzioni iperboliche sono $C^\infty(\mathbf{R})$ e soddisfano evidentemente le identitá

$$\cosh^2 t \ - \ \sinh^2 t \ = \ 1, \quad \forall \ t \in \mathbf{R}$$

$$\sinh 2t \ = \ 2 \sinh t \cosh t \qquad\qquad \cosh t \ = \ 2\cosh^2 t \ - \ 1$$

Inoltre, $\sinh t$ é **dispari**, $\cosh t$ é **pari**, e valgono le seguenti formule

$$\frac{d}{dt} \sinh t \ = \ \cosh t, \qquad\qquad \frac{d}{dt} \cosh t \ = \ \sinh t \qquad\qquad \frac{d}{dt} \frac{\sinh t}{\cosh t} \ = \ \frac{1}{\cosh^2 t}$$

In particolare, $\sinh t$ é strettamente crescente, e quindi invertibile, su tutto $\mathbf{R}$, mentre $\cosh t$ é strettamente crescente, e quindi invertibile, su $[0, +\infty)$.

Dalla regola di derivazione della funzione inversa segue che

$\frac{d}{dt} \sinh^{-1} t = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(t))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\sinh t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ e analogamente per $\cosh^{-1} t$:

$$\frac{d}{dt} \sinh^{-1} t \ = \ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \qquad\qquad \frac{d}{dt} \cosh t \ = \ \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}, \quad \forall \, t \geq 1$$

NOTA

$$\tfrac{d}{dt} \log(t \ + \ \sqrt{1+t^2}) \ = \ \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \log(t \ + \ \sqrt{1+t^2})|_{t=0} \ = \ 0 \ = \ \sinh^{-1}(0) \quad \Rightarrow$$

$$\sinh^{-1} t \ = \ \log(t \ + \ \sqrt{1+t^2}), \quad \forall \, t \in \mathbf{R}$$

Analogamente,

$$\cosh^{-1} t \ = \ \log(t \ + \ \sqrt{t^2-1}), \quad \forall \, t \geq 1$$