VI ESERCITAZIONE DI AM1B

In questa lezioni svolgiamo essenzialmente esercizi sulla discussione di serie numeriche sia a termine positivi che a termini a segno alterno.

1. Esercizi su serie numeriche

Esempio 1.1. Sia $x \geq 0$; stabiliamo il carattere di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-\sqrt{n}}.$$

Poichè la serie è a termini positivi, possiamo applicare il criterio del rapporto

$$\frac{x^{n+1-\sqrt{n+1}}}{x^{n-\sqrt{n}}} = x^{1+\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = xx^{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} =$$
$$xx^{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} = xx^{-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} \to x$$

Qundi se $x \leq 1$, la serie diverge; se $0 \leq x < 1$, la serie converge. (Si osservi che per $x = 1$ il criterio del rapporto non è applicabile, ma d'altra parte in questo caso è chiaro che la serie diverge).

Esempio 1.2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3+(\ln x)^{2n}} \quad \text{con} \quad x > 0$$

Poichè la serie è a termini positivi, è possibile applicare il criterio della radice ed ottenere così

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3+(\ln x)^{2n}}} \sim \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln x)^{2n}}} = \frac{1}{(\ln x)^2}$$
$$\frac{1}{(\ln x)^2} < 1 \iff |\ln x| < 1 \iff \frac{1}{e} < x < e$$
$$\frac{1}{(\ln x)^2} > 1 \iff |\ln x| > 1 \iff x < \frac{1}{e} \vee x > e$$

Inoltre se $|lnx| = 1$ allora la serie diverge chiaramente. In definitiva si ha che la serie converge se e solo se $\frac{1}{e} < x < e$. Per $0 < x \leq \frac{1}{e}$ e $x \geq e$ diverge.

Esempio 1.3. Determiniamo il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$$

Procediamo applicando il criterio del rapporto:

$$\frac{3n!}{n!(2n)!}\frac{(n+1)!(2n+2)!}{(3n+3)!} =$$
$$\frac{(n+1)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \to \frac{4}{27} < 1$$

e dunque la serie converge.

Esempio 1.4. Sia $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ con $p > 0$. Applicando il criterio di Leibniz, si osserva immediatamente che la serie converge.

Osservazione 1.5. Se $p = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n} < +\infty$. Mentre è noto che

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n} = +\infty$$

Quindi questo esempio mostra che

$$\text{Convergenza} \not\Rightarrow \text{ Convergenza assoluta}$$

Esempio 1.6. Stabiliamo il carattere della seguente serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

Applichiamo il criterio di condensazione che dice che una serie $\sum_n a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_n 2^n a_{2^n}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2^n\ln 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

Esempio 1.7. Studiamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$

Innanzitutto osserviamo che la serie converge perché si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+2)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

poiché $n^2 + 2n > n^2$. Poiché

$$\frac{2}{n(n+2)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

allora

$$\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-1} =$$
$$\frac{3}{2} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-1} \to \frac{3}{2}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+2)} = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\frac{2}{n(n+2)} = \frac{3}{2}$$

Esempio 1.8. Le seguenti serie divergono in quanto $a_n \to +\infty$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{1-e^{-n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^2}$$

Esempio 1.9. Studiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{n^2}}{n^{n^2}}$. La serie è a termini positivi. Applichiamo dunque il criterio della radice n-sima:

$$\sqrt[n]{\frac{e^{n^2}}{n^{2n}}} = \frac{e^{\frac{n^2}{n}}}{n^{\frac{2n}{n}}} = \frac{e^n}{n^2} \to +\infty > 1$$

e dunque la serie diverge.

In quest' ultima parte svolgiamo un esercizio sul calcolo del massimo e minimo limite e sul calcolo delle successioni utilizzndo la definizione.

Esempio 1.10. Calcoliamo

$$\max \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+1}$$

$$\min \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+1}$$

Si considerino le due sottosuccessioni $\{\frac{n^2}{2n^2+1}\}$ e $\{-\frac{n^2}{2n^2+1}\}$ che contengono, rispettivamente, tutti i termini positivi e tutti quelli negativi della successione di partenza. La prima ha limite $\frac{1}{2}$ e la seconda $-\frac{1}{2}$. E quindi si ha

$$\max \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\min \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+1} = -\frac{1}{2}$$

Abbiamo usato il fatto che per il calcolo del massimo limite i termini della seconda successione, essendo negativi, non avrebbero potuto dare un contributo tale da ottenere una sottosuccessione con limite maggiore di $\frac{1}{2}$. Analogo discorso vale per il minimo limite.

Esempio 1.11. Verifichiamo che

$$\frac{n^2+1}{n^2} \to 1$$

Vogliamo cioè provare che, $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists \ n_0 \ \mid \ \forall n > n_0 \ |\frac{n^2+1}{n^2} - 1| < \varepsilon$. Ovvero $\frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

Verifichiamo adesso che $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-1}{3^n} = 0$

$$|\frac{2^n-1}{3^n}| < \varepsilon \Leftrightarrow 2^n - 1 < \varepsilon 3^n \Leftrightarrow 2^n < \varepsilon 3^n + 1$$

basta prender $(\frac{2}{3})^n < \varepsilon$ e cioè

$$n > [\ln_{\frac{2}{3}} \varepsilon]$$