III ESERCITAZIONE DI AM1B

Nella prima parte della lezione calcoliamo qualche limite. Dopodiché introduciamo il numero di Nepero, e calcoliamo qualche successione per ricorrenza.

1. Calcolo di alcuni limiti

Ora mostriamo come le radici si comportano bene rispetto alle radici.

Lemma 1.1. *Sia* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \geq 0$. *Per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^{\frac{1}{k}} = A^{\frac{1}{k}}$$

Dimostrazione. Supponiamo sia $A > 0$. Utilizziamo la seguente scomposizione

$$x^k - x_0{}^k = (x - x_0)(x^{k-1} + x^{k-2}x_0 + \cdots + x_0^{k-1})$$

con $x = a_n^{\frac{1}{k}}$ ed $x_0 = A^{\frac{1}{k}}$. Allora, poiché $A > 0$ e quindi definitivamente $a_n > \delta > 0$, per $n \gg 0$ si ha

$$a_n - A \geq (a_n^{\frac{1}{k}} - A^{\frac{1}{k}})(\delta^{k-1})$$

e quindi

$$a_n^{\frac{1}{k}} - A^{\frac{1}{k}} \leq \frac{a_n - A}{\delta^{k-1}}$$

e la seconda successione tende a zero per ipotesi.

Sia ora $A = 0$. Allora per ogni $\varepsilon^k > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$

$$|a_n| < \varepsilon^k$$

Ma per la stretta crescenza di $x^{\frac{1}{k}}$ ciò equivale a dire che

$$|a_n^{\frac{1}{k}}| < \varepsilon$$

□

Osservazione 1.2. Per ogni $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ si ha che se $\lim_{n\to\infty} a_n = A \geq 0$ ed $A > 0$ allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n{}^{\frac{p}{q}} = (\lim_{n\to\infty} a_n{}^{\frac{1}{q}})^p = \alpha^{\frac{p}{q}}$$

Si dica cosa accade se a_n diverge.

Inoltre questo continua a valere per potenze reali, ma non lo proviamo.

Esempio 1.3. Calcoliamo il seguente limite $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt{4n^2+1}}$. Si ha

$$\frac{\sqrt{n^2+3n+1}}{\sqrt{4n^2+1}} = \frac{n\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}$$

La quantità sotto radice al numeratore tende ad 1 mentre quella al denominatore a 4. Sicché per la proposizione precedente il limite è $1/2$.

Esempio 1.4. Sia $\{a_n\}$ una successione con limite $+\infty$. Se $A > 1$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\beta}{A^{a_n}} = 0$$

per ogni $\beta > 0$. Osserviamo che definitivamente $a_n > 0$ sicché possiamo supporre $a_n > 0$ per ogni n.

Iniziamo con $\beta = 1$. Poiché $A > 1$ allora $\sqrt{A} > 1$ e quindi $\sqrt{A} = 1 + h$ con $h > 0$. Sicché

$$(\sqrt{A})^{a_n} = (1+h)^{a_n} \geq (1+h)^{[a_n]} \geq 1 + h[a_n]$$

L'ultima disugualianza è stata provata nella prima esercitazione.

Quindi elevando al quadrato

$$A^{a_n} \geq (1 + h[a_n])^2 \geq h^2[a_n]^2$$

da cui

$$0 \leq \frac{a_n}{A^{a_n}} \leq \frac{a_n}{h^2[a_n]^2} \leq \frac{[a_n]+1}{h^2[a_n]^2} = \frac{1}{h^2[a_n]} + \frac{1}{h^2[a_n]^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Sia ora β un qualsiasi numero reale positivo. Allora si ha

$$\frac{{a_n}^\beta}{A^{a_n}} = \left(\frac{\frac{a_n}{\beta}}{A^{\frac{a_n}{\beta}}} \right)^\beta \beta^\beta$$

Ora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\beta} = 0$ sicché la quantità tra parentesi tende a zero per la prima parte della dimostrazione. Inoltre esistono un numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$0 < q < \alpha$$

sicché, essendo $\frac{\frac{a_n}{\beta}}{A^{\frac{a_n}{\beta}}}$ definitivamente minore di 1,

$$0 \leq \left(\frac{\frac{a_n}{\beta}}{A^{\frac{a_n}{\beta}}} \right)^\beta \beta^\beta \leq \left(\frac{\frac{a_n}{\beta}}{A^{\frac{a_n}{\beta}}} \right)^q \beta^\beta$$

Poiché il terzo termine tende a zero per osservazione dopo 1.1 si ha la tesi.

Diamo un'applicazione del precedente risultato.

Esempio 1.5. Per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $B \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_B n)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

Supponiamo dapprima $B > 1$. Ponendo $a_n = \log_B n$ si ha $(B^{a_n})^\alpha = n^\alpha$. Si osservi che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ e quindi il precedente esempio ci dice che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\log_B n)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

Se $B < 1$ allora $\frac{1}{B} > 1$ e $\log_B(x) = -\log_{\frac{1}{B}(x)}$ come abbiamo visto nella scorsa lezione.

La seguente proposizione risulta molto nel calcolo di successione che coinvolgono radici n-esime con n che tende ad infinito.

Proposizione 1.6. *Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ allora*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

Dimostrazione. Supponiamo inizialmente $0 < l < \infty$. Fissiamo un intorno $I_l = (H', K')$ di l. Scegliamo $H, K > 0$ tali che $H' < H < l < K < K'$. Per ipotesi, poiché $(H, K) \subset I_l$ esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$

$$H < \frac{a_{n+1}}{a_n} < K$$

Quindi si ha

$$Ha_n < a_{n+1} < Ka_n$$

Per induzione si prova che per ogni $n \geq n_0$

$$H^n \frac{a_{n_0}}{H^{n_0}} < a_n < k^n \frac{a_{n_0}}{k^{n_0}}$$

Per la monotònia della potenza n-esima sui numeri positivi si ha

$$H \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{H^{n_0}}} < \sqrt[n]{a_n} < K \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{K^{n_0}}}$$

Ma la prima e la terza successione tendono rispettivamente ad H e a K sicché definitivamente si ha

$$H' < H \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{H^{n_0}}} < \sqrt[n]{a_n} < K \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{K^{n_0}}} < K'$$

e cioè $\sqrt[n]{a_n} \in I_l$ definitivamente. Cioè, per l'arbitrarietà di I_l, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Nei casi $l = 0$ o $l = +\infty$ basta una sola delle disuguaglianze che abbiamo trovato. □

Osserviamo che non vale il viceversa. Infatti consideriamo la successione

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$$

(Perché b_n è unione disgiunta di due sottosuccessioni che convergono ad 1, vedi 1.9). Mentre il limite di $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ non esiste in quanto quest'ultima successione è

$$\begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Esempio 1.7. Facciamo vedere come si ottiene facilmente il limite noto

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Infatti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

e quindi per la proposizione precedente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Esempio 1.8. Calcoliamo il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$$

Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n + 1 = +\infty$$

E quindi per la proposizione precedente si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Lemma 1.9. *Sia $\{a_n\}$ una successione che possiamo dividere tra due sottosuccessioni $\{a_{h_n}\}$ e $\{a_{k_n}\}$ in modo che tutti gli elementi della successione appartengono a qualcuna di esse, e se entrambe hanno limite l allora*

$$\lim a_n = l$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione esistono n_0 ed n_1 tali che

$$|a_{h_n} - l| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geq n_0$$

e

$$|a_{k_n} - l| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } n \geq n_1$$

Sia ora $\bar{n} = \max\{h_{n_0}, h_{n_1}\}$ allora per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$. Infatti, se $n \geq \bar{n}$, a_n sta in una delle due sottosuccessioni. Sia essa, ad esempio, a_{h_n}. Allora esiste m tale che $n = h_m$. Poiché $h_m = n \geq \bar{n} \geq h_{n_0}$ allora, per definizione di sottosuccessione, h_n è una funzione crescente e quindi $m \geq n_0$. Quindi

$$|a_n - l| = |a_{h_m} - l| < \varepsilon$$

□

2. Numero di Nepero

Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{1}$$

Avete provato a lezione che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

e quindi esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$. Quest'ultimo fatto tra l'altro lo si potrebbe anche direttamente per induzione per ogni $n \geq 4$. Quindi si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \frac{8}{3} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{8}{3} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{64}{27}$$

sicché la serie (1) converge.

Definizione 2.1. Il limite della serie (1) si indica con e e viene detto numero di Nepero.

Dalle considerazioni precedenti si ha

$$2 < \frac{8}{3} < e \leq \frac{64}{27} < 3$$

Proveremo ora che anche la seguente serie

$$T_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

tende ad e.

Crescenza di T_n

Mediante la formula del binomio (Vedi Appendice) si ha

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \frac{1}{n^k}$$

Poiché $-\frac{1}{n+1} < 1$ si ha

$$1 - \frac{k}{n+1} \leq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k$$

e quindi

$$T_n \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} < \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = T_{n+1}$$

che è quello che volevamo.

Limitatezza di T_n

Inoltre

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} < \frac{1}{k!}$$

Quindi abbiamo che T_n ammette limite finito ed inoltre

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} < e$$

da cui

$$\lim T_n \leq e \tag{2}$$

Si osservi che, se $n > m$, risulta

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}$$

Facendo tendere n a $+\infty$ si ha

$$\lim T_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

per ogni m, e quindi passando al limite per $m \to \infty$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} T_n \geq e$ che abbinata a (2) si ha

$$\lim_{n\to\infty} T_n = e$$

3. Successioni per ricorrenza

Una successione per ricorrenza è una successione definita nel seguente modo

$$a_1 = A \in \mathbb{R} \qquad a_{n+1} = f(a_n)$$

con f una funzione definita su qualche sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Esempio 3.1. Provare che la successione

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$$

converge ad 1.

Innanzitutto è facile provare (facile induzione) che $a_n > 0$ per ogni n.

Proveremo che entrambe le successioni $b_n = a_{2n-1}$ e $c_n = a_{2n}$ tendono ad 1.

Studiamo b_n. Proviamo innanzitutto, per induzione, che b_n è limitata.

Per $n = 1$ è ovvio. Supponiamo sia vero per b_n. Allora

$$b_{n+1} = a_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{a_{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1/\sqrt{a_{2n-1}}}} = \sqrt[4]{b_n} < 1$$

Inoltre, poiché $b_n < 1$,

$$b_{n+1} = \sqrt[4]{b_n} > b_n$$

cioè b_n è crescente e quindi, essendo limitata, ammette un limite $0 < l \leq 1$. Dalla relazione

$$b_{n+1} = \sqrt[4]{b_n}$$

facendo tendere n a $+\infty$ si ottiene

$$l = \sqrt[4]{l}$$

e cioè $l = 1$.

Si provi in modo simile che la successione c_n è maggiore di 1 e decrescente e quindi tendente ad un certo limite l. Come prima si prova che questo limite è 1. Per 1.9 si ha che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Esempio 3.2 (Media aritmo-geometrica)**.** Siano $0 < a_1 < b_1$. Si ponga

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ e } b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

Proviamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$$

Si provi con una facile induzione che $a_n > 0$ e $b_n > 0$ (si devono provare le asserzioni contemporaneamente). Si osservi che, per ogni $n \geq 1$, $a_n < b_n$. Per $n = 1$ è vero per ipotesi. Se $n > 1$ allora

$$b_n - a_n = \left(\sqrt{\frac{a_{n-1}}{2}} + \sqrt{\frac{b_{n-1}}{2}}\right)^2 > 0$$

Proviamo ora che b_n è decrescente.

Infatti

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) < b_n$$

Quindi essendo limitata inferiormente b_n ammette limite finito e siccome $a_n < b_n$ allora anche a_n è convergente.

Siano i limiti di a_n e b_n rispettivamente l_1 e l_2. Dalle relazioni ricorsive si ha

$$l_2 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

da cui segue $l_1 = l_2$.

4. Appendice

Dimostriamo la seguente formula detta *formula del binomio di Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Proviamo per induzione. Per $n = 0$ è ovvio.

Supponiamo sia vero per n e proviamolo per $n+1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} =& (a+b)^n(a+b) = (a+b)\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\Big) \qquad \text{per ipotesi induttiva} \\
=& a\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\Big) + b\Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\Big) \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{(n+1)-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
=& \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{k} b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
=& a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\
=& a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \qquad \text{perché } \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \\
=& \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

La formula

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

è semplice da verificare (basta osservare che per $k < 0$ e $k > n+1$ è ovvia; per gli altri k basta svolgere ambo i membri).