AC1 – Tutorato 6

Paolo Tranquilli

Venerdì 22 Aprile

1. Mostrare che se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una funzione intera e si ha che per $|z|$ abbastanza grande ho
$$|f(z)| \leq C\,|z|^k$$
allora $f(z)$ è un polinomio con grado al massimo k.

2. Mostrare che se f è una funzione intera non costante allora $f(\mathbb{C})$ è denso in $\mathbb{C}$.

3. Dati U e V aperti di $\mathbb{C}$ si dice *isomorfismo di U e V* una funzione olomorfa $f : U \to V$ invertibile e con inversa olomorfa. Se tale funzione esiste allora U e V si dicono *isomorfi*. Se $U = V$ l'isomorfismo si dice *automorfismo*, e $\operatorname{Aut}(U)$ denota l'insieme degli automorfismi di U. Sia D il disco aperto di raggio unitario e centro 0.

   (a) Determinare se $\mathbb{C}$ è isomorfo o meno a D.

   (b) Verificare velocemente che $\operatorname{Aut}(U)$ è un gruppo rispetto all'operazione di composizione e che un isomorfismo $f : U \to V$ induce un isomorfismo di gruppi $\tilde{f} : \operatorname{Aut}(U) \to \operatorname{Aut}(V)$.

   (c) Mostrare che $r_\theta(z) := e^{i\theta}z$ con $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $g_\alpha := \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}$ con $|\alpha| < 1$ sono automorfismi di D.

   (d) Dimostrare il

   Lemma 1 (Schwartz) *Sia $f : D \to D$ una funzione olomorfa tale che $f(0) = 0$. Allora*

   - $\forall z \in D : |f(z)| \leq |z|$;
   - *Se esiste $z_0 \neq 0$ con $|f(z_0)| = |z_0|$, allora f è una rotazione attorno all'origine, ovvero esiste α di modulo 1 tale che $f(z) = \alpha z$.*

   (*suggerimento*: considerare $g(z) = f(z)/z$)

   (e) Concludere che f è un automorfismo di D se e solo se $f = r_\theta \circ g_\alpha$ per $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e $|\alpha| < 1$ unici. Mostrare anche che se f fissa l'origine allora è una rotazione.

4. Sia $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Mostrare che se $|f(z)| < 1$ e f fissa due punti allora f è l'identità.