

**AC1 - ANALISI COMPLESSA**  
**TUTORATO 1**

PAOLO TRANQUILLI

- (1) Calcolare:
- (a)  $(3 - i)^4$ ;
  - (b)  $\frac{2+i}{3-2i}$ ;
  - (c)  $\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$ ;
  - (d)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{125}$ ;
  - (e)  $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ ;
- (2) Calcolare:
- (a)  $\sqrt[4]{i}$ ;
  - (b)  $\sqrt[4]{-i}$ ;
- (3) Supponiamo che una tartaruga meccanica si muova nel piano complesso partendo dall'origine orientata verso nord e seguendo poi le seguenti istruzioni:
- 1:  $a \leftarrow 1$ ;
  - 2: procedi di  $a$  in avanti;
  - 3: voltati di  $45^\circ$  a destra;
  - 4:  $a \leftarrow \frac{a}{2}$ ;
  - 5: vai a  $2$ ;
- Dove arriverà la tartaruga?
- (4) Si dimostri che nel piano complesso non esistono triangoli equilateri con tutti i vertici in  $\mathbb{Z}[i]$ .
- (5) Dimostrare che se  $f$  e  $g$  sono funzioni olomorfe lo è anche  $f \circ g$ .
- (6) Dimostrare che una funzione olomorfa non costante non può avere costanti:
- (a) valore assoluto;
  - (b) parte reale;
  - (c) parte immaginaria;
  - (d) argomento;
- (7) Dimostrare che

$$f(z) \text{ olomorfa} \iff \overline{f(\bar{z})} \text{ olomorfa};$$

(8) Per  $z \in \mathbb{C}$  si ponga

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!};$$

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!};$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Verificare che  $\forall z, w \in \mathbb{C}$ :

- (a) il raggio di convergenza delle serie è infinito;
- (b)  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  e  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ;
- (c)  $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ ;
- (d)  $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$ ;
- (e)  $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$ ;