Esonero del 06/04/2004 ST1 Prof. Lea Petrella a.a. 2003/2004

Soluzione.

a) Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti $M_X(t) = E(e^{tX})$:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tX} \frac{1}{\theta^2} x e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx = \frac{1}{\theta^2} \int_0^\infty x e^{-\left(\frac{1}{\theta}-t\right)x}\, dx.$$

Moltiplicando e dividendo per $\left(\frac{1}{\theta} - t\right)^2$ otteniamo

$$M_X(t) = \frac{\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^2}{\theta^2} \int_0^\infty \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^2} x e^{-\left(\frac{1}{\theta}-t\right)x}\, dx = \frac{\left(\frac{1}{\theta}-t\right)^2}{\theta^2} = \frac{1}{(1-t\theta)^2}.$$

Inoltre sappiamo che $E(X^k) = \frac{d^k}{dt^k} M_X(t)\Big|_{t=0}$, quindi:

$$E(X) = \frac{d}{dt} M_X(t)\Bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\frac{1}{(1-t\theta)^2}\Bigg|_{t=0} = \frac{2\theta}{(1-t\theta)^3}\Big|_{t=0} = 2\theta$$

e

$$E(X^2) = \frac{d}{dt} M_X(t)\Bigg|_{t=0} = \frac{6\theta^2}{(1-t\theta)^4}\Bigg|_{t=0} = 6\theta^2$$

da cui si ottiene che la varianza è data da

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 6\theta^2 - 4\theta^2 = 2\theta^2.$$

b) Dobbiamo mostrare che la densità $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} x \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}$ appariene alla famiglia esponenziale ovvero si può scrivere come $d(x)\exp\{c(\theta) + a(\theta)t(x)\}$. Infatti si ha:

$$f_\theta(x) = x \exp\left\{-2\log(\theta) - \frac{1}{\theta}x\right\},$$

e ponendo $d(x) = x$, $c(\theta) = -2\log(\theta)$, $a(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ e $t(x) = x$ concludiamo che la densità $f_\theta(x)$ appartiene alla famiglia esponenziale.

c) La distribuzione congiunta del campione $X_1, \ldots, X_n$ è data da

$$f_\theta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^n x_i \exp\left\{-2n\log\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i\right\}$$

e visto che $f_\theta(x)$ appartiene alla famiglia esponenziale si ha che $T(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X_i}$ è una statistica sufficiente per θ.

d) Calcoliamo la funzione generatrice dei momenti sfruttando l'indipendenza delle variabili $X_1, \ldots, X_n$:

$$M_{T(\mathbf{X})}(t) = E\left(\exp\left\{t\sum_{i=1}^n X_i\right\}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^n E\left(e^{tX_i}\right) = \frac{1}{(1-t\theta)^{2n}}.$$

Questa è la funzione generatrice dei momenti di una $Gamma(2n, \frac{1}{\theta})$, quindi si ha che $T \sim Gamma(2n, \frac{1}{\theta})$

e) Calcoliamo la media di $\bar{X}$:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n}n2\theta = 2\theta.$$

Da questo si deduce che la media campionaria non è uno stimatore corretto per θ, nonostante ciò è possibile correggerlo dividendolo per 2:

$$E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{2n}\right) = \frac{1}{2}E(\bar{X}) = \frac{1}{2}2\theta = \theta.$$

f) Poniamo $T^*(\mathbf{X}) = \frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X_i}}{\mathbf{2n}}$, per definizione si ha che

$$MSE\left(T^*(\mathbf{X})\right) = Var\left(T^*(\mathbf{x})\right) - Bias^2\left(T^*(\mathbf{x})\right),$$

ma $Bias\left(T^*(\mathbf{x})\right) = E\left(T^*(\mathbf{X})\right) - \theta = 0$ in quanto lo stimatore è corretto. Quindi per l'inidpendenza si ha

$$MSE\left(T^*(\mathbf{X})\right) = Var\left(T^*(\mathbf{X})\right) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n 2\theta^2 = \frac{\theta^2}{2n}.$$

g) Per vedere se lo stimatore è UMVUE calcoliamo il Lower Bound Cramer-Rao (LBCR), che per uno stimatore corretto è dato da $LBCR = \frac{1}{I(\theta)}$ dove

$$I(\theta) = -nE\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(x)\right)$$

è l'informazione di Fisher. Ora

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\ln f_\theta(x) = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{2}{\theta}+\frac{x}{\theta^2}\right) = \frac{2}{\theta^2}-\frac{2x}{\theta^3}.$$

Quindi

$$I(\theta) = -nE\left(\frac{2}{\theta^2}-\frac{2x}{\theta^3}\right) = -\frac{2n}{\theta^2}+\frac{4n}{\theta^2} = \frac{2n}{\theta^2}$$

e $LBCR = \frac{\theta^2}{2n}$. Essendo uguale all'$MSE$ dello stimatore deduciamo che esso è UMVUE

h) Applicando la definizione di media

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \frac{1}{\theta}\int_0^\infty \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \frac{1}{\theta},$$

quindi $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}$ è uno stimatore corretto per $\frac{1}{\theta}$:

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{X_i}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E\left(\frac{1}{X_i}\right) = \frac{1}{n}\frac{n}{\theta} = \frac{1}{\theta}$$