Soluzioni I

15/03/2004

Esercizio 1. Consideriamo $Z = \lambda X^c$, allora la funzione di distribuzione è $F_Z(z)$ sarà data da:

$$P(Z < z) = P(\lambda X^c < z) = P\left(X < \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{1/c}\right) = \int_0^{\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{1/c}} \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c}\, dx$$

applicando il cambio di variabili $y = \lambda x^c$ si ha che $dy = \lambda c x^{c-1} dx$ e che gli estremi dell'integrale diventano 0 e z. Perciò

$$P(Z < z) = \int_0^z e^{-y}\, dy = 1 - e^{-z}$$

ovvero la funzione di distribuzione di un'esponenziale di parametro 1.
Se invece utilizziamo la funzione generatrice dei momenti dobbiamo mostrare che

$$E[e^{tZ}] = \frac{1}{1-t}$$

cioè la funzione generatrice dei momenti di un'esponenziale di parametro 1.

$$\begin{aligned} E[e^{tZ}] &= E[e^{t\lambda x^c}] = \int_0^\infty \lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c} e^{t\lambda x^c}\, dx = \int_0^\infty \lambda c x^{c-1} e^{-(1-t)\lambda x^c}\, dx \\ &= \frac{1}{1-t} \int_0^\infty \lambda(1-t) c x^{c-1} e^{-(1-t)\lambda x^c}\, dx = \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

dal fatto che $\int_0^\infty \lambda(1-t)cx^{c-1}e^{-(1-t)\lambda x^c}\, dx = 1$ essendo l'integrale della densità di una variabile Weibull di parametri $(1-t)\lambda$ e c.

Esercizio 2. Osserviamo che $0 < Y < 1$. Calcoliamo la funzione di distribuzione $F_Y(y)$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P\left(\frac{X}{1+X} < y\right) = P\left(X < \frac{y}{1-y}\right) \\ &= \int_0^{\frac{y}{1-y}} \frac{1}{B(a,b)} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\, dx = \int_0^{\frac{y}{1-y}} \frac{1}{B(a,b)} \frac{x^{a+b}}{(1+x)^{a+b}} \frac{1}{x^{b+1}}\, dx \end{aligned}$$

poniamo ora $z = \frac{x}{1+x}$, allora $x = \frac{z}{1-z}$ e $dx = \frac{dz}{(1-z)^2}$:

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{1}{B(a,b)} z^{a+b} \frac{(1-z)^{b+1}}{z^{b+1}} \frac{dz}{(1-z)^2} = \int_0^y \frac{1}{B(a,b)} z^{a-1}(1-z)^{b-1}\, dz.$$

Perciò la $F_Y(y)$ è la funzione di distribuzione di una Beta con parametri a, b.

Esercizio 3. La dimostrazione si basa sulla proprietà di linearità del valore atteso e sulla definizione di covarianza ($Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$).

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) =$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right)\right) - E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) E\left(\sum_{j=1}^{m} b_j Y_j\right) =$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j X_i Y_j\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) \sum_{j=1}^{m} b_j E(Y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E(X_i Y_j) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j E(X_i)E(Y_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j (E(X_i Y_j) - E(X_i)E(Y_j)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j Cov(X_i, Y_j). \qquad \square$$

Esercizio 4. (a) Sia X è una v.a., che ammette i momenti primi e secondi, allora si ha in generale

$$Var(X) = E(X^2) - (EX)^2.$$

Quindi possiamo scrivere per S:

$$(ES)^2 = E(S^2) - Var(S),$$

e per la correttezza di S^2 abbiamo

$$(ES)^2 = \sigma^2 - Var(S) < \sigma^2.$$

Da cui

$$ES < \sigma.$$

(b) Ricordiamo che se $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ si ha che

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

Ora per calcolare la distorsione di S dobbiamo prima calcolare la sua media, per fare questo avremmo bisogno della sua distribuzione che non è nota, calcoliamo quindi la media di $\sqrt{W}$ dove

$$W := \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

$$E\left(\sqrt{W}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} dx =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} dx,$$

operando il cambio di variabile $y = \frac{1}{2}x$ si ha:

$$\frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} dy = \frac{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(\frac{n-1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sqrt{2}$$

ovvero

$$E\left(\sqrt{(}W)\right) = \frac{\sqrt{n-1}E(S)}{\sigma} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sqrt{2}$$

da cui si ricava che la distorsione di S è data da

$$Bias(S) = E(S) - \sigma = \sigma\left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} - 1\right). \qquad \square$$