Soluzioni

10/5/2004

Esercizio 1. a) La funzione di verosimiglianza è data da

$$L(\theta) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\theta-1} = \exp\left\{ n \log\theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^n \log x_i \right\}$$

e il suo logaritmo da

$$l(\theta) = n \log\theta + (\theta-1) \sum_{i=1}^n \log x_i.$$

Per trovare lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ deriviamo $l(\theta)$:

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \log x_i \Leftrightarrow \hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^n \log x_i}.$$

b) Dobbiamo calcolare $E(\hat{\theta})$. Osserviamo che $Y = -\log X$ è una v.a. esponenziale di parmetro θ. Infatti poniamo $y = -\log x$ e quindi $x = e^{-y}$ dunque

$$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) \left| \frac{d}{dy} e^{-y} \right| = \theta e^{-\theta y},$$

Quindi

$$\sum_{i=1}^n . \log x_i \sim Gamma(n, \theta) \Rightarrow -\frac{1}{\sum_{i=1}^n \log x_i} \Rightarrow GI(n, \theta),$$

dove $GI(n, \theta)$ è una Gamma Inversa. Ora

$$E\left(-\frac{1}{\sum_{i=1}^n \log x_i} \right) = \frac{1}{n-1}\theta \Rightarrow E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n-1}\theta.$$

Lo stimatore di massima verosimiglianza $\hat{\theta}$ non è corretto ma asintoticamente corretto, infatti

$$Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = \frac{1}{n-1}\theta \to 0.$$

c) Uno stimatore T è consistente se e solo se $MSE(T) \to 0$ per $n \to \infty$. La varianza di $\hat{\theta}$ è data da

$$Var(\hat{\theta}) = n^2 Var(-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \log x_i}) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\theta^2 \ \to \ 0.$$

Ora

$$MSE(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + (Bias(\hat{\theta}))^2 \to 0$$

quindi lo stimatore è consistente.

d) Per la proprietà di invarianza degli stimatori di massima verosimglianza, essendo invertibili le funzioni $1/\theta$ e $\theta(1-\theta)$, gli stimatori sono $1/\hat{\theta}$ e $\hat{\theta}(1-\hat{\theta})$.

Esercizio 2. La funzione di densità congiunta è data da:

$$f(x_1, x_2; \theta) = \theta^2 x_1^{\theta-1} x_2^{\theta-1} I_{(0,1)}(x_1) I_{(0,1)}(x_2),$$

da cui segue che la funzione di potenza è:

$$\pi(\theta) = Prob((x_1, x_2) \in C_\alpha)|\theta) = \int_{C_\alpha} f(x_1, x_2; \theta) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} \left[\int_{3/4}^1 \theta x_2^{\theta-1} dx_2 \right] dx_1 = \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} [x_2^\theta]_{3/4}^1 dx_1 =$$

$$= \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} \left[1 - \left(\frac{3}{4} x_1 \right)^\theta \right] dx_1 = \int_0^1 \theta x_1^{\theta-1} - \left(\frac{3}{4} x_1 \right)^\theta \int_0^1 \theta x_1^{2\theta-1} dx_1 =$$

$$= [x_1^\theta]_0^1 - \left(\frac{3}{4} \right)^\theta \frac{\theta}{2\theta} [x_1^{2\theta}]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^\theta.$$

L'ampiezza α di un test è

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \pi(\theta).$$

Nel nostro caso si ha:

$$\alpha = \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^\theta \right\},$$

poichè la funzione di potenza è una funzione monotona non decrescente di θ, il sup si ha in corrispondenza di $\theta = 1$, quindi l'ampiezza è data da $\alpha = \frac{5}{8}$.

Esercizio 3. a) La funzione di potenza è data da:

$$\pi(\theta) = Prob(x \in C_\alpha|\theta) = \int_{C_\alpha} f(x;\theta)dx =$$

$$= \int_{1/2}^{1} \theta x^{\theta-1} dx = [x^\theta]_{1/2}^{1} = 1 - \frac{1}{2^\theta}.$$

da cui segue che:

$$\alpha = \sup_{\Theta_0} \pi(\theta) = \sup_{0\leq\theta\leq 1} \{1 - \frac{1}{2^\theta}\} = \frac{1}{2}.$$

b) Poiché le ipotesi a confronto sono entrambi semplici utilizziamo il lemma di Neyman-Pearson per costruire un test più potente. La regione critica è definita dai valori di x tali che:

$$\frac{L(\theta_0;x)}{L(\theta_1;x)} \leq k_\alpha.$$

Ovvero:

$$\frac{L(\theta=2;x)}{L(\theta=1;x)} = 2x \Rightarrow 2x \leq k_\alpha \Leftrightarrow x \leq k'_\alpha,$$

e quindi si ha che:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x \leq k'_\alpha\}.$$

Inoltre dalla condizione:

$$\alpha = Prob(x \in C_\alpha|\theta_0) =$$

$$= \int_0^{k'_\alpha} 2x dx = [x^2]_0^{k'_\alpha} = k'^2_\alpha$$

segue che:

$$k'_\alpha = \sqrt{\alpha}.$$

c) Dal punto b) sappiamo che $\alpha = k'^2_\alpha$, inoltre

$$\beta = Prob(x \notin C_\alpha|\theta_1) =$$

$$= \int_{k'_\alpha}^{1} dx = [x]_{k'_\alpha}^{1} = 1 - k'_\alpha.$$

Quindi:

$$\alpha + \beta = k'^2_\alpha + 1 - k'_\alpha.$$

Tale quantità è minimizzata per $k'_\alpha = \frac{1}{2}$. Il test richiesto è quindi definito dalla regione critica:

$$C = \{x \in (0,1) : x \leq 1/2\}.$$

d) Osserviamo che la funzione di densità è di tipo esponenziale per cui possiamo utilizzare il Rapporto Monotono di Verosimiglianza (MLR) per costruire il test richiesto. Sia $\theta_1 > \theta_2$, allora:

$$MLR = \frac{\theta_1 x^{\theta_1 - 1}}{\theta_2 x^{\theta_2 - 1}} = \left(\frac{\theta 1}{\theta 2}\right) x^{\theta_1 - \theta_2} =$$

$$\left(\frac{\theta 1}{\theta 2}\right) \exp\{(\theta_1 - \theta_2) \log x\},$$

che è una funzione monotona non decrescente per la statistica $t(x) = \log x$, quindi un test UMP è definito dalla regione critica:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : \log x \geq k_\alpha\},$$

ovvero:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x \geq k_\alpha\}.$$

Inoltre:

$$\alpha = Prob(x \in C_\alpha | \theta = 2) =$$

$$\int_{k_\alpha}^{1} 2x dx = 1 - k_\alpha^2 \Rightarrow k_\alpha = \sqrt{1 - \alpha}$$

Esercizio 4. a) Per determinare il test richiesto utilizziamo i Lemma di Neyman-Pearson:

$$\frac{L(\theta_0; x)}{L(\theta_1; x)} \leq k_\alpha \Rightarrow \frac{L(\theta = 0; x)}{L(\theta = 1; x)} = \frac{1}{2x} \leq k_\alpha$$

$$\Rightarrow x \geq k_\alpha.$$

Quindi la regione critica è determinata da:

$$C_\alpha = \{x \in (0,1) : x \geq k_\alpha\}.$$

Inoltre:

$$\alpha = Prob(x \in C_\alpha | \theta = 0) =$$

$$\int_{k_\alpha}^{1} dx = 1 - k_\alpha$$

$$k_\alpha = 1 - \alpha.$$

b) La funzione potenza è data da:

$$\pi(\theta) = Prob(x \in C_\alpha|\theta) =$$

$$= \int_{1/2}^{1} (2\theta x + 1 - \theta) dx = 1 - \int_{0}^{1/2} (2\theta x + 1 - \theta) dx =$$

$$= 1 - \frac{\theta}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\theta}{2} = \frac{2+\theta}{4}.$$

Inoltre:

$$\alpha = \sup_{\Theta_0} \pi(\theta) = \sup_{-1 \le \theta \le 0} \frac{2+\theta}{4} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio 5.

Esercizio 6.