Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini -
Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato n.8 del 4/5/2004

1. Dimostrare che uno spazio topologico X è T1 se e solo se i singoli punti sono sottoinsiemi chiusi.

2. Stabilire se le seguenti coppie di spazi topologici sono o meno omeomorfe:

   (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof}), (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{cof})$.

   (b) $\frac{(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})}{\mathbb{Z}}, (S^1, \mathcal{T}_{cof})$.

   (c) $\frac{(\mathbb{R}, i_s)}{\mathbb{Z}}, (S^1, \mathcal{B})$

   con $\mathcal{T}_{cof}$ si indica la topologia cofinita e con $\mathcal{B}$ la topologia banale

3. Dimostrare che qualsiasi quoziente di uno spazio topologico discreto X è discreto.

4. Dimostrare che qualsiasi quoziente di uno spazio topologico X con topologia banale ha ancora topologia banale.

5. Dimostrare che il quoziente di un qualsiasi spazio topologico X è T1 se e solo se le classi di equivalenza sono sottoinsiemi chiusi di X.

6. Sia $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la superficie sferica di raggio 1 e centro l'origine. Sia data su S^2 la relazione d'equivalenza, detta antipodale, che mette ciascun punto $\mathbf{x}$ in relazione con sè stesso e col punto opposto. Dimostrare che lo spazio quoziente è omeomorfo a $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

7. Sia ρ la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ che mette in relazione tra loro tutti i punti con uguale ascissa, tranne quelli di ascissa 0 che sono in relazione solo se la differenza delle ordinate è un numero intero. Sia X lo spazio topologico quoziente $\frac{\mathbb{R}^2}{\rho}$.(dove $\mathbb{R}^2$ ha la topologia euclidea)

   (a) Trovare almeno un punto $x \in X$ che non ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}$.

   (b) Dare una base numerabile di X.

   (c) Dire quali assiomi di separazione soddisfa X.

   (d) Determinare la chiusura dell'immagine in X, secondo la proiezione canonica, del disco di centro l'origine e raggio $\frac{1}{2}$.