Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato n.4 del 30/3/2004

1. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione tra spazi topologici continua e invertibile. Dimostrare che

$$f \text{ aperta } \Leftrightarrow f \text{ chiusa } \Leftrightarrow f \text{ omeomorfismo.}$$

2. Dare un esempio di applicazione continua e biunivoca tra spazi topologici che *non* sia un omeomorfismo.

3. dimostrare che le seguenti coppie sono formate da spazi topologici omeomorfi tra loro. (dove non è indicato esplicitamente, si intende che lo spazio abbia la topologia euclidea)

$$\begin{array}{cc}
(\mathbb{R}, j_s), (\mathbb{R}, j_d) & (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \\
\mathbb{R}, (0,1) & \mathbb{R}_0^+, [0,1) \\
(\mathbb{R}, i_s), (\mathbb{R}, i_d) & (A, \mathcal{T}_{cof}), (B, \mathcal{T}_{cof}) \ \text{ se } \#A = \#B.
\end{array}$$

4. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'omeomorfismo; sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti di X e sia $b_n := f(a_n)$. Dimostrare che un punto $x \in X$ è un limite della successione $\{a_n\}$ se e solo se la sua immagine $y \in Y$ è un limite della successione $\{b_n\}$.

5. dimostrare che le seguenti coppie sono formate da spazi topologici non omeomorfi tra loro. (dove non è indicato esplicitamente, si intende che lo spazio abbia la topologia euclidea)

$$(\mathbb{R}, i_s) \text{ e } \mathbb{R}; \quad \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{Q}; \quad (A, \mathcal{T}_{cof}) \text{ e } (B, \mathcal{T}_{cof}) \ \text{ se } \#A \neq \#B.$$

6. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazioni di *insiemi* e sia $\mathcal{T}$ una topologia su X. definiamo la famiglia di sottoinsiemi di Y

$$f_*(\mathcal{T}) := \left\{ A \subseteq Y \ / \ f^{-1}(A) \in \mathcal{T} \right\}.$$

   (a) Dimostrare che $f_*(\mathcal{T})$ è una topologia su Y
   (b) Dimostrare che prendendo su Y questa topologia f è continua
   (c) Dimostrare che se $\mathcal{T}'$ è un'altra topologia su Y che rende f continua allora $f_*(\mathcal{T}) \succ \mathcal{T}'$
   (d) Dimostrare che se $\mathcal{T}$ è la topologia discreta su X, $f_*(\mathcal{T})$ è la topologia discreta su Y.
   (e) Dimostrare che se f è un'applicazione costante, $f_*(\mathcal{T})$ è la topologia discreta su Y qualunque sia $\mathcal{T}$.

7. Sia Y l'insieme quoziente $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ e $p : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ la proiezione; si consideri su Y la topologia $p_*(\mathcal{T}_e)$. Si considerino la successione in $\mathbb{R}$ definita da $a_n := 2\pi n + \frac{1}{n}$ e la corrispondente successione in Y data da $b_n := p(a_n)$.

   (a) Verificare che la successione $\{a_n\}$ non ha limite in $\mathbb{R}$ mentre la successione $\{b_n\}$ ha un punto limite in Y.

   (b) Dimostrare che $\mathbb{R}$ e Y non sono spazi topologici omeomorfi.

   (c) Costruire una topologia analoga a quella euclidea per gli spazi proiettivi $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

8. Sia $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici n a coefficienti reali e si consideri su esso la topologia euclidea, ereditata da $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che il determinante è un'applicazione continua di questo spazio in $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea).