Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: Dott. M. Nesci

Tutorato del 16/3/2004

1. Sia X un insieme. Dimostrare che:
   (a) Se $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sono topologie su X, allora $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è una topologia.
   (b) Se $\{\mathcal{T}_\alpha\}$ è una famiglia di topologie su X, allora $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ è una topologia.
   (c) Sia $\mathcal{F}$ una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi di X. Dimostrare che l'insieme delle topologie che contengono $\mathcal{F}$, ordinate rispetto all'inclusione, ammette un elemento minimo $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ che è la topologia meno fine che contenga $\mathcal{F}$.
   (d) Applicare il punto precedente alla famiglia
   $$\mathcal{F} = \{[m,n] \subseteq \mathbb{R} \ / \ m,n \in \mathbb{Z}\}.$$
   Dire quali sono gli aperti della topologia risultante.

2. Sia X uno spazio topologico e A un suo sottoinsieme. Dimostrare che la frontiera di A è vuota se e solo se A è sia aperto che chiuso.

3. Calcolare Int, Est e Fr dei seguenti sottoinsiami di $\mathbb{R}$ secondo le topologie: euclidea, cofinita, conumerabile, discreta, banale, j_s, j_d, i_s, i_d e $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ (ricavata dal punto (d) dell'esercizio precedente).
   (a) $\{(a,b)\ , a,b \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\{[a,b]\ , a,b \in \mathbb{R}\}$
   (c) $\mathbb{Q}$
   (d) $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}_0\right\}$
   (e) $\left\{\frac{1}{n+1} + (-1)^n, n \in \mathbb{Z}_0\right\}$

4. Sia X uno spazio topologico e A e B suoi sottoinsiemi qualsiasi. Dimostrare che
   (a) $\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$
   (b) $\mathrm{Est}(\mathrm{Int}(A)) \supseteq \mathrm{Est}(A)$
   (c) $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$
   (d) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

   e trovare degli esempi in cui le inclusioni sono strette.