

Tutorato del 5/3/2003

1. Dimostrare che un'applicazione costante è continua.
2. Sia $Q = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ il quadrato di lato 1.
 - (a) Scrivere Q come unione di dischi aperti.
 - (b) Scrivere Q come unione *numerabile* di dischi aperti.
3. Dimostrare che un sottoinsieme A di uno spazio metrico (X, d) è aperto se e solo se per ogni punto x di A esiste un disco centrato in x tutto contenuto in A . (*ricordiamo che un insieme A è per definizione aperto se e solo se è un'unione di dischi*)
4. Verificare se i seguenti insiemi sono aperti secondo ciascuna delle topologie dell'esercizio 6 e secondo la metrica discreta.
 - (a) \mathbb{Z} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (come sottoinsiemi di \mathbb{R}).
 - (b) \mathbb{Q} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (come sottoinsiemi di \mathbb{R}).
 - (c) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } 2 \leq \|\mathbf{x}\| < 3\}$.
 - (d) $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } \|\mathbf{x}\| > 4\}$.
 - (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } xy \neq 1\}$.
5. Trovare una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua imponendo sul codominio la metrica euclidea ma non continua utilizzando invece la metrica discreta (Si mantenga la metrica euclidea sul dominio). È possibile trovare un esempio per il contrario?
6. Si considerino le metriche su \mathbb{R}^n :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|^2} \quad (1)$$

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i| \quad (2)$$

$$d''(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sup \{|x_i - x'_i|\}. \quad (3)$$

Sia f un'applicazione da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n .

- (a) Si mantenga sul codominio di f la metrica euclidea. Dimostrare che f è continua, utilizzando sul dominio una delle tre metriche date prima, se e solo se lo è utilizzando le altre due.

- (b) Generalizzare modificando anche la metrica definita sul codominio: dimostrare che la nozione di continuità di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ non cambia utilizzando in tutte le possibili combinazioni queste metriche sul dominio e sul codominio.