UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 3

Seconda prova di esonero - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definisca la nozione di topologia prodotto di una famiglia di spazi topologici;

(b) Si enunci il risultato che relaziona la compattezza di due spazi topologici con quella dello spazio prodotto;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Si consideri il seguente sottospazio $S \subset \mathbb{R}^3$, con la topologia euclidea:

$$S = \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1, z \in [0,1) \ \} \cup$$
$$\cup \{ \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=z=0, y \in (-2,-1] \cup \{0\} \cup [1,2) \ \}.$$

(a) Determinare le componenti connesse di $S \setminus \{(0,1,0),(0,-1,0)\}$;

(b) per quali $s \in \overline{S}$ si ha che $\overline{S} \setminus \{s\}$ è compatto?

3. Sia ρ la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$: $x\rho y$ se e solo se $x-y \in \mathbb{Z}$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Considerando $\mathbb{R}$ e $[0,1)$ con la topologia euclidea E, sia f la segente applicazione continua:

$$f : \mathbb{R} \to [0,1)$$

tale che

$$f(x) = x - [x]$$

dove $[x]$ denota la parte intera di $x \in \mathbb{R}$.

(a) Verificare che $\rho = \rho_f$;

(b) trovare gli aperti di $\mathbb{R}$ saturi rispetto ad f;

(c) dimostrare che $(\mathbb{R}/\rho, E/\rho)$ è omeomorfo a $[0,1)$.

4. Sia (X,d) uno spazio metrico e, per ogni $\epsilon > 0$, sia $Y_\epsilon = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq \epsilon\}$ con la topologia indotta e $p : Y_\epsilon \to X$ la restrizione della prima proiezione.

Si dimostri che:

(a) Y_ϵ è chiuso $\forall \ \epsilon > 0$;

(b) se (X,d) è $\mathbb{R}^n$ e d la distanza euclidea, allora $p^{-1}(x)$ è compatto $\forall \ x \in \mathbb{R}^n$;

(c) se (X,d) è uno spazio metrico qualsiasi, è ancora vero che $p^{-1}(x)$ è compatto $\forall \ x \in X$?

5. Sia X uno spazio topologico, ∞ un elemento non appartenente ad X e sia $X^* = X \cup \{\infty\}$. Sia $\mathcal{T}^*$ la famiglia di sottoinsiemi $A \subset X^*$ tali che o A è un aperto di X oppure $\infty \in A$ e A^c è chiuso e compatto in X.

(a) Si dimostri che $\mathcal{T}^*$ è una topologia su X^* e che $X \in \mathcal{T}^*$;

(b) si dimostri che X^* con la topologia $\mathcal{T}^*$ è compatto;

(c) si dimostri che X è compatto se e solo se ∞ è un punto isolato di X^* (cioè $\{\infty\}$ è aperto e chiuso in X^*).