**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE**

**Corso di Laurea in Matematica**

**GEOMETRIA 3**

**Prima prova di esonero - a.a. 2003-2004**

**1.** (a) Si definiscano le nozioni di spazio topologico e di applicazione continua tra due spazi topologici;

(b) Si enunci il risultato che dà altre due caratterizzazioni della continuità di applicazioni continue tra due spazi topologici;

(c) si dimostri tale risultato.

**2.** Sia $\mathcal{S}$ la seguente famiglia di sottoinsiemi $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S} = \{(n, n+1], \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Verificare se $\mathcal{S}$ può essere sottobase di qualche topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$. Se lo è determinare questa topologia;

(b) Confrontare la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ con la topologia $j_s$ (degli intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra).

(c) Determinare, $\forall x \in \mathbb{R}$ una base locale composta da un solo intorno della topologia $\mathcal{T}$.

**3.** Sia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, sia $[0, 2\pi)$ con la topologia di sottospazio di $(\mathbb{R}, euclidea)$ e sia $f : [0, 2\pi) \to S^1$ l'applicazione che associa ad ogni $\alpha \in [0, 2\pi)$ il punto di $S^1$ il cui angolo con l'asse delle x è $\alpha$.

(a) Per ogni coppia di punti $P, Q \in S^1$, siano $0 \leq \alpha_P, \alpha_Q < 2\pi$ gli angoli formati da OP, OQ con l'asse delle x e si ponga $d(P, Q) = |\alpha_P - \alpha_Q|$. Si dimostri che con tale distanza $(S^1, d)$ è uno spazio metrico;

(b) Dotando $S^1$ della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}^2$, si dimostri che $f$ è continua, biettiva ma non un omeomorfismo.

**4.** Sia $D$ un disco di $(\mathbb{R}^3, euclidea)$ con la topologia di sottospazio e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ anch'esso con la topologia di sottospazio di $(\mathbb{R}, euclidea)$.

(a) Si dimostri che non esiste un'applicazione $f : D \to \mathbb{Z}$ che sia continua e suriettiva;

(b) Si dimostri che non esiste un'applicazione $f : D \to \mathbb{Z}$ che sia continua e non costante;

(c) Si dimostri che esiste un'applicazione $f : D \to \mathbb{R}$ che sia continua e suriettiva.

**5.** Sia $X$ un insieme infinito dotato della topologia meno fine tra quelle tali che i sottoinsiemi $X - \{x\}$ sono aperti per ogni $x \in X$. Siano $Y \subset X$ un sottoinsieme infinito con la topologia di sottospazio e $f : Y \to Z$ un'applicazione continua in uno spazio topologico $Z$. Mostrare che:

(a) per ogni sottoinsieme $U$ di $X$ e per ogni ricoprimento aperto $U \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, c'è un insieme finito di aperti $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ che ricoprono ancora $U$;

(b) Sia $f(Y)$ con la topologia di sottospazio di $Z$. In $f(Y)$ non esiste un sottoinsieme non vuoto aperto e chiuso e diverso da $f(Y)$.

## SOLUZIONI

**1.** (a) [Sernesi, paragrafi 2 e 4]. (b) e (c) [Sernesi, Prop. 4.1]. ■

**2.** (a) $\mathcal{S}$ è sottobase di una topologia $\mathcal{T}$ se e solo se le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ sono base di $\mathcal{T}$. Ora si vede facilmente che

$$(n, n+1] \cap (m, m+1] \neq \emptyset \iff n = m$$

e quindi l'insieme $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ coincide con $\mathcal{S}$ stesso. Applichiamo la Prop. 2.2 del [Sernesi]: si ha

$$(i) \qquad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1] = \mathbb{R}$$

e

$$(ii) \quad (n, n+1] \cap (m, m+1] = \begin{cases} \emptyset & \text{if } n \neq m \\ (n, n+1] \in \mathcal{B}_\mathcal{S} & \text{if } n = m \end{cases}$$

quindi $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ è base di un'unica topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$, i cui aperti sono tutte e sole le unioni del tipo

$$(*) \quad A = \bigcup_{i \in I} (n_i, n_i + 1], \quad n_i \in \mathbb{Z}.$$

(b) Per quanto appena mostrato si ha $\mathcal{T} \subseteq j_s$ ma non sono uguali in quanto, per esempio $(0, \frac{1}{2}) \in j_s - \mathcal{T}$.

(c) Sia $x \in \mathbb{R}$, $N$ un intorno di $x$ in $\mathcal{T}$ ed $A$ un aperto di $\mathcal{T}$, come in $(*)$, tale che $x \in A \subset N$. Allora esiste $i \in I$ tale che $x \in (n_i, n_i + 1], n_i \in \mathbb{Z}$. Ora, se $x \in \mathbb{Z}$ allora $x = [x] = n_i + 1$, dove $[x]$ denota la parte intera di $x$; invece se $x \notin \mathbb{Z}$ allora $[x] = n_i$. Se ne deduce che una base locale di $\mathcal{T}$ in $x$ è

$$B_x = \begin{cases} (x-1, x] & \text{if } x \in \mathbb{Z} \\ ([x], [x]+1] & \text{if } x \notin \mathbb{Z} \end{cases} . \quad \blacksquare$$

**3.** (a) È ovvio che $d(P,Q) = d(Q,P)$ e $d(P,Q) = |\alpha_P - \alpha_Q| \geq 0$ ed è uguale a 0 se e solo se $\alpha_P = \alpha_Q$, cioè se e solo se $P = Q$ in quanto $f$ è chiaramente biiettiva. Infine per $P, Q, R \in S^1$, di angoli $0 \leq \alpha_P, \alpha_Q, \alpha_R < 2\pi$, si ha

$$d(P,Q) = |\alpha_P - \alpha_Q| = |\alpha_P - \alpha_R + \alpha_R - \alpha_Q| \leq |\alpha_P - \alpha_R| + |\alpha_R - \alpha_Q| = d(P,R) + d(R,Q)$$

e pertanto con tale distanza $(S^1, d)$ è uno spazio metrico.
(b) $f$ è continua: sia $A \subset S^1$ un aperto e $x \in f^{-1}(A)$. Allora $f(x) \in A$, dunque esiste un disco $D_r(f(x))$ (nella distanza euclidea in $\mathbb{R}^2$) tale che $D_r(f(x)) \cap S^1 \subset A$. Ma $D_r(f(x)) \cap S^1$ è un arco di cerchio centrato in $f(x)$, e quindi esiste $\delta > 0$ tale che $f((x-\delta, x+\delta) \cap [0, 2\pi)) = D_r(f(x)) \cap S^1 \subset A$. Ne segue che $(x - \delta, x + \delta) \cap [0, 2\pi) \subset f^{-1}(A)$. Allora $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto, quindi aperto. Questo dimostra che $f$ è continua. Se $f$ è un omeomorfismo, allora è aperta, quindi $f([0,\pi))$ è aperto in $S^1$. Ma allora $f([0,\pi))$ è un intorno di $f(0) = (1,0)$ e quindi esiste un aperto di $S^1$ contenente $f(0)$ e tutto contenuto in $f([0,\pi))$. Ma allora esiste un arco di cerchio centrato in $f(0)$ e tutto contenuto in $f([0,\pi))$, contraddizione. $\blacksquare$

**4.** (a) e (b) Sia $f : D \to \mathbb{Z}$ un'applicazione continua. Dato che la topologia euclidea induce su $\mathbb{Z}$ la topologia discreta, $\forall x \in D$ si ha che $\{f(x)\}$ è un aperto di $\mathbb{Z}$ e la continuità di $f$ implica che esiste un disco $D_{r_x}(x) \subset D$ tale che $f(D_{r_x}(x)) \subset \{f(x)\}$, cioè $f(y) = f(x), \forall y \in D_{r_x}(x)$. Sia ora $Z = f(D) \subset \mathbb{Z}$. Allora $\forall n \in Z$ esiste $x_n \in D$ tale che $f(x_n) = n$, quindi esiste un disco $D^{(n)}$ tale che $x_n \in D^{(n)} \subset D$ e $f(y) = n, \forall y \in D^{(n)}$. Dato che, per ogni $x \in D$ si ha $f(x) = n \in Z$ per qualche $n$ abbiamo mostrato che

$$D = \coprod_{n \in Z} D^{(n)}.$$

Ora se $f$ non è costante allora, tra tali dischi $D^{(n)}$, ce ne sono almeno due distinti e quindi ognuno di tali dischi è chiuso proprio in $D$, contraddizione.
(c) È sufficente proiettare $D$ su un suo diametro aperto, che è dunque un intervallo $(a,b)$ e scegliere un omeomorfismo tra $(a,b)$ e $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

**5.** (a) Si osservi che la topologia di $X$ è quella che ha per chiusi $X$ ed i suoi sottoinsiemi finiti: infatti ogni sottoinsieme $X - \{x_1, \ldots, x_n\} = (X - \{x_1\}) \cap \ldots \cap (X - \{x_n\})$ è aperto. Sia ora $U \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ un ricoprimento aperto. Se $A_{i_0} = X - \{y_1, \ldots, y_n\}$ è uno di essi e $\{y_1, \ldots, y_n\} \cap U = \{y_{j_1}, \ldots, y_{j_k}\}$ allora per ogni $s = 1, \ldots, k$ c'è un aperto $A_{i_s}$ contenente $y_{j_s}$. Ne segue che $U \subset \bigcup_{s=0}^{n} A_{i_s}$.

(b) Sia $C \subset f(Y)$ un sottoinsieme non vuoto aperto e chiuso e diverso da $f(Y)$. Allora $A = f^{-1}(C) \subset Y$ è un sottoinsieme non vuoto aperto e chiuso e diverso da $Y$. Ne segue che $Y = A \cup B$ con $A, B$ aperti non vuoti disgiunti di $Y$. Ma allora $A = Y - \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = Y - \{b_1, \ldots, b_m\}$, dunque $A \cap B = \emptyset$ implica $Y = (Y - A) \cup (Y - B) = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ e dunque finito, contraddizione.