Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004

Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: M. Nesci

Esercitazione del 28/04/2004

1.1 Sia X un insieme infinito e Y un insieme avente almeno 2 elementi. Siano K_Xe K_Ye $K_{X\times Y}$ le topologie cofinite su (rispettivamente) X, Y, $X \times Y$.
Denotata con $\mathcal{T}_{X\times Y}$ la topologia prodotto di (X, K_X) per (Y, K_Y), verificare che $K_{X\times Y} < \mathcal{T}_{X\times Y}$.

1.3 Sia f un omeomorfismo da $(X, \mathcal{T}_X)$ a $(Y, \mathcal{T}_Y)$.
Fissato $y_0 \in Y$ sia $c_0 : X \to Y$ l'applicazione costante $c_0(x) = y_0$, $\forall x \in X$.
Sia

$$F : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y \times Y, \mathcal{T}_{Y\times Y})$$

tale che $\forall x \in X$,

$$F(x) = (f(x), y_0).$$

Verificare che F e' una immersione.

1.5 Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ una identificazione.
Verificare che:
$\mathcal{T}_X = P(X)$ implica che $\mathcal{T}_Y = P(Y)$.
Inoltre : $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_X^{ban}$ implica che ci sia la topologia banale anche su Y.

1.6 Sia f la seguente applicazione fra spazi topologici:

$$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$$

sia ρ_f la relazione di equivalenza su X indotta da f, e sia F l'applicazione dallo spazio topologico quoziente allo spazio $(Y, \mathcal{T}_Y)$.
Verificare che:
(i) F e' continua se e solo se f e' continua
(ii) f aperta implica che F e' aperta
(iii) se $\mathcal{T}_Y = f_*(\mathcal{T}_X)$ allora F e' una immersione.

1.7 Sia ρ la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}$: $x\rho y$ se e solo se $x - y \in \mathcal{Z}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
Sia f la segente applicazione:

$$f : (\mathbb{R}, E) \to ([0, 1), E_{|[0,1)})$$

tale che

$$f(x) = x - [x]$$

Verificare che $\rho = \rho_f$