Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: M. Nesci

Esercitazione del 2/04/2004

1.1 Sia q la seguente applicazione: $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.
Verificare che:
(1) $q : (\mathbb{R}, E) \to (\mathbb{R}, E)$ e' continua, dove E e' la topologia euclidea.
(2) $q : (\mathbb{R}, i_d) \to (\mathbb{R}, i_d)$ non e' continua.
(3) $q : (\mathbb{R}, j_d) \to (\mathbb{R}, j_d)$ non e' continua.

1.2 Sia $X = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ e (X, d) spazio metrico con la metrica euclidea indotta.Si consideri la seguente applicazione:

$$g : (X, \mathcal{T}_d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$$

$$g(x) = [x]$$

con $\mathcal{T}_d$la topologia indotta dalla metrica d su X, e $\mathcal{T}$ una topologia qualsiasi su $\mathbb{R}$.
Mostrare che l'applicazione rimane continua qualunque sia la topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$.

1.3 Dimostrare che la metrizzabilita' e' una proprieta' topologica, cioe' e' invariante per omeomorfismi.

1.4 Sia $f : X \to Y$ un'applicazione biunivoca fra due spazi non vuoti. Siano $\mathcal{T}_X$e $\mathcal{T}_Y$due topologie rispettivamente su X e su Y.
Verificare che:

$$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, f_*\mathcal{T}_X)$$

e

$$f : (X, f^{-1}\mathcal{T}_Y) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$$

sono omeomorfismi.
Sia, inoltre, $\mathcal{T}_X$ una topologia su X tale che $\mathcal{T}_{ban} < \mathcal{T}_X < P(X)$. Determinare opportune topologie su Y in modo che l'applicazione biunivoca $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T})$ sia continua ma non aperta,oppure aperta ma non continua.

1.5 Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, f omeomorfismo.
Sia $S \subset X$, S sottinsieme. Verificare che f trasforma $Int(S)$, $Est(S)$, $Fr(S)$, $\overline{S}$,$D(S)$ in $Int(f(S))$,$Est(f(S))$, $Fr(f(S))$,$\overline{(}f(S)$, $D(f(S))$.

1.6 Sia $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ un'applicazione fra spazi topologici.
Dimostare che f e' un'immersione (o inclusione continua) se e solo se f e' iniettiva, continua, e tale che $\mathcal{T}_X = f^{-1}\mathcal{T}_Y$.

1.7 Verificare usando il punto precedente che data :

$$f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$$

f continua, iniettiva, aperta (oppure chiusa) allora segue che f e' una immersione