

Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: M.
Nesci

Esercitazione del 17/3/2004

- 1.1 Sia (X, \mathcal{T}) spazio topologico discreto.
(i) Dimostrare che \mathcal{T} verifica il I assioma di numerabilità'.
(ii) Dimostrare che \mathcal{T} verifica il II assioma di numerabilità' se e solo se X è finito o numerabile.
- 1.2 Sia (\mathbb{R}, i_s) .
(i) Determinare per ogni $x \in X$ una base locale aperta e numerabile.
(ii) Dimostrare che (\mathbb{R}, i_s) verifica il II assioma di numerabilità'.
(iii) Si considerino in (\mathbb{R}, i_s) le tre successioni:
 $(a_n) = a, \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$
 $(b_n) = -n, \forall n \in \mathbb{N}$
 $(c_n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$
Verificare che la prima converge a $r \in \mathbb{R}, \forall r \geq a$, che la seconda converge a $r \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}$, la terza non converge.
(iv) Dedurre che (\mathbb{R}, i_s) non è metrizzabile.
- 1.3 Sia (X, \mathcal{T}) e sia (X, \mathcal{T}') , con $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$.
Sia (x_n) una successione in X tale che converge ad un unico limite $x \in X$ rispetto alla topologia \mathcal{T} .
(i) Verificare che se la successione converge rispetto a \mathcal{T}' allora converge soltanto allo stesso limite x .
(ii) Determinare un esempio di successione convergente ad un limite in \mathcal{T} e non convergente in \mathcal{T}' .
- 1.4 Sia (x_n) una successione in (\mathbb{R}, j_s) .
Verificare che se la successione è convergente allora converge ad un unico limite.
- 1.5 Dimostrare che (\mathbb{R}, j_s) soddisfa il I assioma di numerabilità' ma non il II.
- 1.6 Sia (\mathbb{R}, K) , con K topologia cofinita.
Sia (x_n) una successione in \mathbb{R} formata da elementi tutti distinti fra loro. Verificare che la successione converge ad ogni $a \in \mathbb{R}$.
- 1.7 Sia (X, \mathcal{T}) , con \mathcal{T} verificante il II assioma di numerabilità'. Siano \mathcal{T}' e \mathcal{T}'' due topologie su X tale che

$$\mathcal{T}' < \mathcal{T} < \mathcal{T}''.$$

Provare con opportuni esempi che \mathcal{T}' e \mathcal{T}'' possono non verificare il II assioma.