

Università degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004
Docente: Prof. A. Lopez - Esercitatore: Dott.ssa T. Vistarini - Tutore: Dott.
M. Nesci

Esercitazione del 10/3/2004

1.1 Sia $X = \{a, b, c\}$, un insieme finito.

Trovare tutte le topologie che si possono mettere su un insieme composto da tre punti.

1.2 Sia X un insieme. Data, inoltre, la seguente famiglia:

$$\mathcal{T}_{cof} = \{A \subset X; |X| < \infty\} \cup \{\emptyset\}.$$

Verificare che (X, \mathcal{T}_{cof}) e' uno spazio topologico.

1.3 Si considerino su \mathbb{R} le seguenti topologie:

$$\mathcal{T}_0 = \{A \subset \mathbb{R}; \forall x \in A, a, b \in \mathbb{R}, a < b; x \in (a, b) \subset A\}$$

$$\mathcal{T}_1 = \{A \subset \mathbb{R}, |\mathbb{R}| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

$$\mathcal{T}_2 = \{A \subset \mathbb{R}; \forall x \in A, a, b \in \mathbb{R}, a < b; [a, b] \subset A\}$$

Dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathcal{T}_1 < \mathcal{T}_0 < \mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_3$$

1.4 Sia \mathbb{R} , sia la seguente famiglia su \mathbb{R} :

$$S = \{(-\infty, a], \forall a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$$

(i) Verificare che S non e' una topologia.

(ii) Determinare la piu' piccola topologia su \mathbb{R} che contiene S , indicata con $\mathcal{T}(S)$

(iii) Confrontare $\mathcal{T}(S)$ con i_s la topologia delle semirette su \mathbb{R} .

1.5 Sia (X, \mathcal{T}_{cof}) spazio topologico tale che $|X| > 1$.

Verificare che $U = \{X - \{x\} \mid \forall x \in X\}$ non e' una base della topologia

1.7 Sia S la seguente famiglia su \mathbb{R} :

$$S = \{(a, \infty); a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b); b \in \mathbb{R}\}$$

Esiste una topologia su \mathbb{R} che la ammette come base?

Esiste una topologia su \mathbb{R} che la ammette come sottobase?

1.8 Determinare la topologia $\mathcal{T}(S)$ su \mathbb{R} avente come sottobase il ricoprimento di \mathbb{R} :

$$S = \{(-\infty, 0), (0), (0, \infty)\}$$

Si puo' dire che S e' anche base di questa topologia?