UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 3

Prova scritta del 18-9-2004 - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definiscano le nozioni di spazio metrico e di continuità di funzioni tra spazi metrici;
(b) Si enunci il risultato che caratterizza la continuità di funzioni tra spazi metrici;
(c) si dimostri tale risultato.

2. Si consideri il seguente sottospazio $S \subset \mathbb{R}^3$, con la topologia euclidea:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y = 1, z \in [0, 1)\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\} \cup$$

$$\cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0, x \in (0, 1)\}.$$

(a) Determinare le componenti connesse di $S \setminus \{(0, 0, 0), (1, 0, 0)\}$;
(b) per quali $s \in \overline{S}$ si ha che $\overline{S} \setminus \{s\}$ è compatto?

3. Uno spazio topologico X si dice un U_1-spazio se la seguente proprietà è verificata: per ogni $x, y \in X$ esiste un intorno chiuso U di x tale che $y \notin U$. X si dice U_2 se esistono U e V intorni chiusi di x e y rispettivamente con $U \cap V = \emptyset$. Vero o falso:
(a) U_1 implica T_1;
(b) T_1 implica U_1;
(c) metrizzabile implica U_2.

4. (a) Si definiscano le nozioni di connessione e compattezza negli spazi topologici;
(b) si enuncino i due teoremi che relazionano tali nozioni con gli intervalli di numeri reali nella topologia euclidea;
(c) si dimostri uno di tali due teoremi.

5. Siano X, Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ un'applicazione continua e biiettiva. Sia $I_n = [n, n + 1]$ l'intervallo chiuso con la topologia euclidea per ogni intero n. Mostrare che:
(a) se $X = Y = \underset{n\in\mathbb{Z}}{} I_n$ allora f è un omeomorfismo;
(b) se $X = \underset{n\in\mathbb{Z}}{} I_n$ e $Y = I_0$ allora una tale f non può esistere.

6. Sia X uno spazio topologico, G un gruppo che agisce su X in modo che X è un G-spazio, $\sim$ la relazione di equivalenza indotta da G su X (cioè $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : x = g \cdot y$). Supponiamo inoltre che in X vale la seguente proprietà : $\forall x, y : x \not\sim y$ esistono intorni U_x di x e U_y di y tali che $U_x \cap (\underset{g\in G}{} g \cdot U_y) = \emptyset$.

(a) Si dimostri che X/G con la topologia quoziente è uno spazio di Hausdorff;

(b) l'applicazione canonica $\pi : X \to X/G$ è sempre un rivestimento?