UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea in Matematica
GEOMETRIA 3
Prova scritta del 14-2-2005 - a.a. 2003-2004

1. (a) Si definiscano le nozioni di spazio topologico e di applicazione continua tra due spazi topologici;
(b) Si enunci il risultato che dà altre due caratterizzazioni della continuità di applicazioni continue tra due spazi topologici;
(c) si dimostri tale risultato.
2. Si considerino i seguente sottospazi di $\mathbb{R}^2$, con la topologia euclidea:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq sen(x), 0 \leq x \leq 10y\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : sen(x) + |sen(y)| < 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : sen(x) = sen(y)\}.$$

(a) Determinare quali, tra questi sottospazi, sono connessi;
(b) Determinare quali, tra questi sottospazi, sono compatti.
3. Siano X, Y, Z tre spazi topologici e $f : X \to Z, g : Y \to Z$ due applicazioni continue. Sia

$$W = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) = g(y)\}$$

con la topologia prodotto.
(a) Si dimostri che se X ed Y sono di Hausdorff allora W è di Hausdorff;
(b) se X ed Y sono connessi allora W è necessariamente connesso?
4. (a) Si definiscano le tre nozioni di compattezza negli spazi topologici;
(b) si enunci il teorema che relaziona tali nozioni negli spazi metrici;
(c) si dimostri tale teorema.
5. Sia X uno spazio topologico e $p, q \in X$ due punti distinti. Si consideri la relazione d'equivalenza

$$x\rho y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ oppure \\ x = p, y = q \end{cases}$$

che identifica p e q e sia $Y = X/\rho$ lo spazio topologico quoziente.
(a) Si dimostri che se X è di Hausdorff anche Y è di Hausdorff;
(b) se Y è di Hausdorff anche X è di Hausdorff?

(c) Si dimostri che X è compatto se e solo se Y è compatto.

6. Sia (X,d) uno spazio metrico tale che tutti i suoi dischi $D_r(x)$ sono connessi ed inoltre in X vale la seguente proprietà:

$$\forall x, y \in X, \forall \varepsilon > 0, \text{ esistono } z_0 = x, z_1, \ldots, z_n = y \text{ tali che } d(z_{i-1}, z_i) < \varepsilon, \forall i : 1 \leq i \leq n.$$

(a) Si dimostri che X è connesso;

(b) se i dischi di X sono connessi per archi ne segue che X è connesso per archi?